

A Coleção *Histórias da Matemática em estudos e no ensino*, composta por 10 volumes, celebra – mesmo que à distância e frente à pandemia da COVID-19 – os 20 anos da proposta da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) em considerar a produção de conhecimentos acerca das aproximações entre história da matemática, história da Educação Matemática e o ensino como elementos constitutivos dos minicursos dos seminários. Com o objetivo de fortalecer as relações e interfaces que podem se estabelecer na sala de aula, articulando saberes históricos, matemáticos e interdisciplinares, os temas desta coleção são contextualizados, considerando a realidade de professores que ensinam matemática, envolvendo a educação básica e o ensino superior. Neste volume, as autoras propõem atividades usando a História da Matemática para ensinar Análise Combinatória, mais precisamente, os conceitos de permutação, arranjo e combinação, a partir das obras originais de três cientistas do século XVII: Bernard Frenicle de Bessy (1604?-1674), Blaise Pascal (1623-1662) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). O foco dos 14 exercícios propostos está no conteúdo previsto no documento Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para ser lecionado no 8º ano do ensino fundamental.



ISBN 978-65-5563-059-6



9 786555 630596

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO USANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

LARISSA SENE ARAÚJO
MÔNICA DE CÁSSIA SIQUEIRA MARTINES

ANÁLISE COMBINATÓRIA

UM ESTUDO USANDO A HISTÓRIA DA
MATEMÁTICA EM SALA DE AULA[ORGANIZADORAS]
CRISTIANE COPPE
MÔNICA SIQUEIRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA:

UM ESTUDO USANDO A HISTÓRIA DA
MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

COLEÇÃO

**HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA
EM ESTUDOS E NO ENSINO**

10





LARISSA SENE ARAÚJO
MÔNICA DE CÁSSIA SIQUEIRA MARTINES

ANÁLISE COMBINATÓRIA:

UM ESTUDO USANDO A HISTÓRIA DA
MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

COLEÇÃO

**HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA
EM ESTUDOS E NO ENSINO**

10



2021

Copyright © 2021 Editora Livraria da Física
1ª Edição

Direção editorial: José Roberto Marinho

Revisão de Texto: Alison Luan Ferreira da Silva e Giselle Costa de Sousa

Texto da 4ª Capa: Cristiane Coppe e Mônica Siqueira

Capa: Fabrício Ribeiro

Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Araújo, Larissa Sene

Análise combinatória: um estudo usando a história da matemática em sala de aula / Larissa Sene Araújo, Mônica de Cássia Siqueira Martines. – 1. ed. – São Paulo: Livraria da Física, 2021.
– (Histórias da matemática em estudos e no ensino; 10)

Bibliografia
ISBN 978-65-5563-059-6

1. Matemática - Estudo e ensino I. Martines, Mônica de Cássia Siqueira. II. Título III. Série.

20-53703

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

PREFÁCIO

Neste ano comemoramos 20 anos da coleção História da Matemática para Professores! Foi durante o IV Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), ocorrido na cidade de Natal, no ano de 2001, que foram publicados os primeiros títulos da coleção. A partir daí a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) considerou relevante para a produção de conhecimentos acerca das aproximações entre história da matemática, história da Educação Matemática e o ensino fossem elementos constitutivos dos minicursos dos seminários, gerando tal coleção.

Para a realização do XIV SNHM, o qual ocorrerá pela primeira vez de modo on line, totalmente a distância, devido a pandemia provocada pelo novo Coronavírus (COVID-19), foram selecionados 10 títulos envolvendo temáticas que contribuem para a formação de docentes da Educação Básica e do Ensino superior que estão presentes no currículo.

Mesmo à distância, cada um na segurança de seu lar, o XIV SNHM irá promover todas as atividades que aconteceriam de modo presencial, inclusive as oficinas de minicursos. Os(As) autores(as) adaptaram seus conteúdos para que pudessem ser realizados nesse formato, mantendo a qualidade da produção de conhecimentos, peculiar à coleção.

Comemorar os 20 anos da Coleção História da Matemática para professores, em um formato diferente, à distância, nos mostra como os(as) professores(as) são profissionais

especiais em nossa sociedade e estão sempre à procura de novos saberes, novas competências e habilidades, mesmo em tempos de pandemia.

O diretor da escola era um personagem muito forte. Se realmente quiséssemos algo, ela fazia acontecer. Sua mentalidade era muito positiva e otimista - “você pode fazer isso, mesmo que você seja o primeiro.” Acho que isso influenciou bastante minha vida.

Maryam Mirzakhani

(Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mirzakhani/>)

Cristiane Coppe e Mônica Siqueira
(Organizadoras)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
UM POUCO DOS CONCEITOS	15
2.1 Uma visão da análise combinatória	15
2.2 Uma visão da história da matemática	17
2.2.1 Interpretação do uso da história da matemática em sala de aula	21
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA POSSIBILIDADE DE ENLACE.....	31
SÉCULO XVII: CONTRIBUIÇÕES DE TRÊS PERSONAGENS EUROPEUS.....	39
4.1 Bernard Frenicle de Bessy (1604?-1674)	39
4.1.1 <i>Abregé des combinaisons e Des quarrez magiques:</i> possibilidade de uso em sala de aula	43
4.2 Blaise Pascal (1623-1662).....	49
4.2.1 <i>Traite Du Triangle Arithmetique:</i> possibilidade de uso em sala de aula.....	52
4.2.2 Consequências do Triângulo Aritmético	55
4.2.3 Sobre as combinações	57
4.3 Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716).....	63
4.3.1 <i>Dissertatio de Arte Combinatoria:</i> possibilidade de uso em sala de aula.....	67

ATIVIDADES PROPOSTAS PARA SALA DE AULA ...	77
CONSIDERAÇÕES FINAIS	105
REFERÊNCIAS	109
AS AUTORAS.....	117

INTRODUÇÃO

A matemática, enquanto disciplina do ensino básico, é fundamental na formação do cidadão, pois permite o desenvolvimento de seu pensamento crítico, abstrato e de seu raciocínio lógico. Observando o seu conteúdo e o modo como é ministrada na sala de aula, a matemática permeia dois extremos, podendo se tornar útil em situações cotidianas ou indesejável pelos estudantes – o que prejudica o processo de formação. O professor, diante disso, lança mão de estratégias que promovem a compreensão da matemática e que agem como facilitadoras da comunicação entre professor e aluno para a produção do conhecimento.

O conteúdo de análise combinatória, trabalhado desde os anos iniciais do sistema educacional (ensino fundamental 1) e aprimorado nos anos seguintes (ensino fundamental 2 e ensino médio), representa um desafio da matemática para a compreensão dos alunos, principalmente no ensino médio (VASQUEZ; NOGUTI, 2004).

Castilhos (2015), após pesquisas com alunos e professores do ensino médio, traz, em seu trabalho, o baixo nível de desenvolvimento do raciocínio combinatório tanto no professor como no aluno. Isso é resultado, possivelmente, de um aprendizado falho do professor quando estava em formação e do aluno logo nos anos iniciais, o que deprecia o ensino-aprendizagem na educação básica. O autor observou dificuldades de interpretação e a dependência de fórmulas.

Alves e Segadas (2012) também analisaram o desempenho de discentes do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) na resolução de problemas de análise combinatória. Eles notaram que a maioria dos erros dos licenciandos está ligada à necessidade de adaptar as soluções às fórmulas e ressaltaram que “essa preferência, ou necessidade, sentimento de quase obrigatoriedade de usar uma fórmula, aparentemente, mostra que há uma formalização precoce das técnicas de contagem da análise combinatória” (ALVES; SEGADAS, 2012, p. 419). Nesse sentido, já na educação básica, é preciso desvincular as resoluções das fórmulas, focando na construção do raciocínio combinatório.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), estabelecida desde 2018 pelo governo federal brasileiro como currículo fundamental a todos os alunos da educação básica, traz, para o 4º, o 5º e o 8º ano do ensino fundamental e também para as três séries do ensino médio, habilidades que abrangem problemas de contagem. Esses problemas envolvem a determinação do número de possibilidades de certo agrupamento ou da quantidade de elementos de diferentes agrupamentos. Para os anos iniciais, a BNCC propõe o desenvolvimento da capacidade de determinar a quantidade de agrupamentos possíveis ao se combinar elementos, envolvendo diferentes estratégias independentes de fórmulas e pautadas pela interpretação. Ao longo dos anos, para o ensino fundamental 2 e médio, a proposta é aprimorada, seguindo a ideia da progressão de habilidades (BRASIL, 2018a, 2018b).

A partir disso, já é possível propor, nos anos iniciais da educação, formas de “tratar” o problema do baixo desempenho dos estudantes nesse conteúdo matemático. Assim, a base do

raciocínio combinatório poderá se solidificar, proporcionando melhorias ao desenvolvimento desse conteúdo quando ele for abordado nas séries finais da educação básica e até mesmo no ensino superior – conforme o caminho adotado pelo estudante.

No documento Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), há uma indicação para os professores dos anos iniciais usarem as tendências em educação matemática, inclusive a história da matemática: “Não só os registros precisam ser respeitados e valorizados, mas também o uso do corpo. A história da matemática nos mostra a importância dos dedos para contar, das mãos e dos pés para medir [...]” (BRASIL, 2014, p. 21).

No documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) da matemática, existe um tópico dedicado ao uso da história da matemática como recurso pedagógico, apresentado como importante para o estudo da dinâmica de produção da pluralidade cultural, associando história e sociedade (BRASIL, 1998).

Em duas passagens de seu texto, a BNCC traz comentários que citam a história da matemática como recurso de ensino (2018a, p. 298):

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo

para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BNCC, 2018a, p. 298).

[...]

Cumpra também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática (BNCC, 2018a, p. 299).

Embora sejam passagens breves, é evidente a relação entre matemática e sociedade, principalmente se consideradas as mudanças constantes pelas quais ambas passam e a maneira como essas mudanças refletem uma sobre a outra.

Assim, se o público escolar do século XXI, cada vez mais conectado com a informação, demanda novas formas de ensino como complemento aos métodos tradicionais, no caso da análise combinatória, o professor pode explorar outros recursos pedagógicos. Entre os recursos progressivamente disponíveis e estudados, pode-se buscar aquele que explica as fases de estudo de um conteúdo a partir de sua origem e de seu desenvolvimento: sua história!

O trabalho de Gaspar (2003) discute justamente os benefícios e as formas de aplicação da história da matemática durante as aulas no ensino básico como forma de melhorar o processo de ensino-aprendizagem. A autora ressalta o cuidado necessário ao trabalho com essa história, o qual ampara o levantamento de algumas questões: como é a história da análise combinatória? Existe uma única história? Como essa história ajuda na resolução dos problemas de contagem?

Ao longo das pesquisas para responder a essas perguntas, observamos que pouco tem se estudado, discutido e publicado sobre a história da análise combinatória, e menos ainda tem se utilizado esse meio para o ensino. Com este livro, publicado como resultado do trabalho de conclusão do curso de licenciatura em matemática da primeira autora sob orientação da segunda, realizado e defendido em 2019, pretendemos preencher parte dessa lacuna.

Para tanto, no capítulo 2 deste livro, apresentamos uma perspectiva sobre os conceitos de análise combinatória em seu formato atual e de história da matemática e uma reflexão sobre o uso da história como recurso metodológico no ensino de matemática em sala de aula. No terceiro capítulo, comentamos alguns dos registros associados à construção da análise combinatória, os quais destacaram-se no século XVII por meio dos fragmentos das obras de três cientistas: Bernard Frenicle de Bessy (1604?-1674), Blaise Pascal (1623-1662) e Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), apresentados e discutidos no quarto capítulo. Nesse mesmo capítulo, analisamos a aplicabilidade das obras no ensino da análise combinatória. A partir dessa análise, utilizamos as obras selecionadas na produção de atividades voltadas ao uso da história da matemática como recurso didático para professores da educação básica no ensino dos princípios da análise combinatória, apresentadas no quinto capítulo.

As atividades propostas têm como público principal os alunos do 8º ano do ensino fundamental e estão ligadas à habilidade da BNCC de “(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo.” (BRASIL, 2018a, p. 313), inserida

na unidade temática Números. As atividades também podem ser aplicadas a alunos da 2ª e da 3ª série do ensino médio, seguindo a habilidade “(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore” (BRASIL, 2018b, p. 529). Considerando a importância do contato dos futuros professores com a história da matemática durante o processo de formação docente, as atividades também são indicadas para discentes do curso de licenciatura em matemática.

Destacamos que as atividades deste livro ainda estão no campo da proposição e não foram aplicadas em sala de aula, sendo passíveis de alteração para o uso escolar. Sua estrutura não procura normatizar ou “congelar” a forma de uso da história da análise combinatória no ensino, mas fornecer orientações e propostas para o professor da educação básica, visto aqui como um pesquisador, para a adoção dessa metodologia de ensino. É importante que o docente interessado em aplicar as atividades reconheça a possibilidade, e até mesmo a necessidade, de se realizar pesquisas e leituras preparatórias para além dos capítulos deste livro. As atividades também podem requerer adaptações à didática do professor, às condições particulares de cada turma e à realidade da escola.

Os docentes leitores, e principalmente aqueles que aplicarem as atividades em sala de aula, estão convidados a entrar em contato com as autoras por e-mail, informado nas páginas finais do livro, para *feedback*, sugestões e troca de experiências.

UM POUCO DOS CONCEITOS

2.1 UMA VISÃO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é o ramo da matemática voltado para o estudo de metodologias para a resolução de problemas de contagem. Os métodos buscam agilizar a resolução de problemas sem que seja necessário contar as unidades uma a uma (PAIVA, 2009).

Paiva (2009), Souza (2010) e Iezzi et al. (2013), em seus livros didáticos destinados à 2ª série do ensino médio, trazem exemplos clássicos em que se aplicam os métodos de análise combinatória para a determinação de possibilidades e a tomada de decisões. Entre esses exemplos se encontra a determinação da quantidade de placas de automóveis que podem ser formadas em certas condições; o número de possibilidades de senhas de um site; o cálculo de quantas maneiras é possível escolher números para ganhar na Mega-Sena etc. Percebe-se, nesses exemplos, que a combinatória se ocupa em estudar problemas que envolvam o conjunto dos números naturais e as quatro operações básicas.

Os princípios de contagem aditivo e multiplicativo fundamentam a resolução de problemas de análise combinatória, além de diagramas (ou árvore) de possibilidades e tabelas.

O princípio aditivo da contagem parte dos resultados da teoria dos conjuntos para calcular o número de elementos

decorrentes da união de dois conjuntos finitos, supondo os eventos A e B com m e n elementos cada, respectivamente. Se o evento A é composto por m maneiras distintas de ocorrer e para cada uma dessas maneiras o evento B pode ocorrer de n maneiras distintas, tem-se eventos excludentes e independentes, isto é, ou ocorre um ou ocorre outro, e o total de maneiras de ocorrer um evento ou outro é igual à soma dos números de possibilidades de cada evento: $m + n$ (PAIVA, 2009; PINTO, 2014).

O princípio multiplicativo, mais conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC), envolve o produto entre os elementos dos eventos de um problema. Partindo da mesma definição dada aos eventos A e B no princípio aditivo, o princípio multiplicativo focará no total de maneiras de um evento ocorrer e o outro também. Esse total é igual ao produto dos números de possibilidades de cada evento: $m.n$ (PAIVA, 2009; SOUZA, 2010).

Ambos os princípios podem ser analisados para um mesmo evento, composto por etapas. No primeiro princípio, as etapas do evento são alternativas, e no segundo princípio, as etapas são sucessivas e independentes.

Nos problemas de contagem em que a resolução é trabalhosa, pode-se lançar mão de técnicas de agrupamentos simples, como arranjos, permutações e combinações. Para o desenvolvimento desses agrupamentos, parte-se do conceito de fatorial de um número natural k , simbolizado por $k!$ (k fatorial), calculado pelo produto desse número e de todos os seus antecessores até a unidade: $k.(k - 1) . (k - 2) . (k - 3) . \dots . 1$. Por convenção, $0! = 1$ (IEZZI et al., 2013). O fatorial é importante, pois o uso de produto de números naturais consecutivos

é muito frequente nos problemas de análise combinatória (PAIVA, 2009).

De maneira geral, segundo Paiva (2009) e Iezzi et al. (2013), nos problemas de arranjo simples ($\mathcal{A}$), a ordem e a natureza de n elementos em p agrupamentos importam no cálculo do número de possibilidades, o qual é simbolizado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Nos problemas de permutação (P), um tipo de arranjo, todos os n elementos dos agrupamentos são ordenados, ou seja, o número de elementos é igual ao número de agrupamentos. A permutação é simbolizada por:

$$P_n = n!$$

Nas combinações simples (C), a ordem dos n elementos, tomados p a p , não importa, apenas a natureza. Essas combinações são simbolizadas por:

$$C_{n,p} \text{ ou } C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Como será verificado nos capítulos 3 e 4, muitos dos estudos da análise combinatória do século XVII já caminhavam para a formalização dessas igualdades algébricas, ainda que de forma incipiente, com foco no processo de contagem.

2.2 UMA VISÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Como o próprio nome já revela, a história da matemática dedica-se ao estudo e à investigação de fatos que deram

origem e desenvolveram conceitos matemáticos e se baseia em diferentes formas de registros de civilizações antigas. Miguel e Miorim (2017), por meio de diversos interlocutores citados em seu livro, destacam a importância do caminho percorrido pela matemática até se tornar a ciência de hoje. Os autores defendem que esse tipo de abordagem possui potenciais pedagógicos positivos para a sala de aula.

Embora Miguel e Miorim (2017) comentem sobre o aumento da inserção da história da matemática em diversas publicações brasileiras da área, Moreira e Clareto (2011) criticam e trazem à discussão aquilo que é observável na grade curricular de diversos cursos de matemática do Brasil – senão todos: a falta da devida atenção à história associada aos conteúdos matemáticos. Normalmente, entende-se por um curso de matemática de qualidade aquele em que as disciplinas de matemática pura, com conteúdo demonstrável, recebem destaque. A disciplina de história se encontra isolada, sem associação ao longo do ensino das demais disciplinas da matemática. Segundo apresentado por Michael Foucault (1926-1984) e lembrado pelas autoras Moreira e Clareto (2011), o saber engloba as demonstrações, as reflexões, as narrativas e a história.

Para Roque (2012, p. 15), “pode-se fazer história da matemática por duas razões: para mostrar como ela se tornou o que é; ou para indicar que ela não é apenas o que nos fazem crer que é”. Esses dois benefícios ficam claros para a sala de aula quando surgem questões sobre a necessidade de se estudar um assunto específico de matemática e sobre o porquê de tal assunto exigir um raciocínio mais elaborado. Muitos foram os processos que culminaram na formação e no aprimoramento de um conceito matemático, e a história da matemática é

fundamental para mostrar a origem, os motivos e os estudiosos envolvidos nesses processos, quando for possível.

Diversos relatos de Moreira e Clareto (2011) mostram a essencialidade da história e da história da matemática para se entender a origem e as motivações que levaram ao desenvolvimento dos teoremas e das demonstrações estudadas hoje. A partir da história da construção da matemática nos é permitido questionar, desenvolver e compreender melhor a própria matemática. Contudo, deve-se ter cautela na pesquisa histórica, já que, em momentos do século XIX e início do XX, ela foi tomada como ciência e registrada pelos superiores daquele tempo conforme desejavam – o que é errado, uma vez que a história é neutra e deve se basear em diversos documentos cujas ideias convergem.

Movimentos críticos a essa forma de escrever a história, como a Escola de Annales, foram extremamente importantes, pois levaram os registros a novos rumos, saindo do político em direção ao econômico. Em crítica a esse tipo de registro, autores influenciados por Friedrich Nietzsche (1844-1900) deram destaque à história narrativa, constituída por diversas “verdades”. A ideia é abrir o leque de pesquisas em história, pensando no perfil do leitor do futuro, já que o tempo influencia em sua interpretação. De todo modo, ainda que haja modelos de construção da história, as impressões de quem a relata sempre estarão presentes no texto.

Indo ao cerne do livro, o uso da história da matemática para o ensino básico pode promover nos alunos novas motivações; esse processo os auxilia a construir um pensamento crítico, voltado a uma “aprendizagem inventiva” (MOREIRA; CLARETO, 2011).

Para Lopes e Ferreira (2013), a naturalidade do homem em questionar sobre a origem de objetos e de fenômenos traz vantagens ao uso da história da matemática no ensino básico. Em uma sociedade tão tecnológica como a de hoje, de fato, a pesquisa por respostas é cada vez mais recorrente, seja pela facilidade de encontrá-las, seja pelas inúmeras fontes de informação disponíveis. É exatamente nesse sentido que segue o trabalho da história da matemática, colocando-a disponível para os docentes e discentes criarem caminhos que facilitem a compreensão dessa disciplina. Contudo, nesse processo, surgem as contradições, posto que há uma dificuldade de se encontrar documentos antigos completos que tragam registros verdadeiros da história. Nessas pesquisas, exige-se muito cuidado para a adoção de fontes confiáveis.

Com as limitações e as variabilidades das ferramentas e dos documentos históricos disponíveis, diversas formas de aplicação da história da matemática em aula são possíveis. Em alguns casos, os únicos registros encontrados revelam conteúdos próximos ao formato atual. Dessa forma, é possível realizar essas aplicações por meio de imagens dos registros em pedras ou até pela interpretação de textos originais de livros científicos publicados em séculos passados. Pode-se propor, inclusive, a resolução de problemas do passado com os recursos da época em contrapartida aos recursos atuais. Existem diversas possibilidades para o uso da história, desde que se valorizem as fontes originais, superando as histórias tradicionalmente inseridas nos livros didáticos.

2.2.1 UMA INTERPRETAÇÃO DO USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Segundo Kobiski e Joucoski (2008), a história da matemática, junto à etnomatemática e à modelagem matemática, está inserida no campo de pesquisa das Tendências da Educação Matemática, que tem recebido, nos últimos anos, destaque e dedicação de pesquisadores. Como consequência, espera-se o crescimento gradativo de publicações na área que intentam expor novas metodologias para o trabalho em sala de aula.

Embora a BNCC (2018a) dê pouca atenção à história da matemática, em 1998, os PCNs já haviam dedicado uma seção sobre o uso dessa abordagem como recurso ao ensino de matemática em sala, defendendo que:

A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês”

e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento (BRASIL, 1998, p. 34).

Com esse embasamento legal, elaborado há pouco mais de duas décadas, é possível reconhecer, na história da matemática, um instrumento importante para o ensino da disciplina de matemática e para a resolução de problemas em diversos contextos e épocas, além de perceber sua relação com outras ciências.

Segundo Gressler (2004), a pesquisa histórica:

Reconstrói o passado, sistematicamente, verificando evidências e delineando conclusões. Contribui para o conhecimento do presente à luz dos acontecimentos passados. Capacita o homem para prever, com certa segurança, o que vai lhe suceder no futuro. O foco da pesquisa histórica pode ser dirigido a um indivíduo, grupo, ideia, movimento, instituição, etc. Mas nenhum destes elementos pode ser considerado isoladamente (GRESSLER, 2010, p. 50).

Miguel et al. (2009) destacam o potencial pedagógico da história da matemática no processo de ensino, cuja discussão data do século XVII, com Alexis Claude de Clairaut (1713-1765). Com a expansão das discussões pelo mundo, diversas justificativas para seu uso na educação básica foram colocadas em pauta. Segundo John Fauvel (1947-2001) (1991 apud Miguel et al., 2009), a história, entre outros fatores, motiva os alunos no processo de aprendizagem, instigando a curiosidade e criando novas visões sobre o conteúdo, o que deixa a

disciplina mais humana e apresenta os passos de construção do currículo de matemática.

De acordo com Lopes e Ferreira (2013), três ganhos surgem com o uso da história como recurso didático: reconhecimento de uma lógica natural da matemática; motivação para o aprendizado; visão da matemática agregada a outros currículos. É possível perceber esses ganhos pensando de modo análogo ao reconhecimento do significado de uma palavra que precisa de um contexto para ser integralmente compreendida. Com a matemática, não é diferente; é necessário um contexto que justifique o uso de certas formalizações. Ao professor, permite-se criar conexões entre passado e futuro: “como tal problema foi resolvido na sua época e como ele seria resolvido hoje?”.

A matemática jamais possuiu um único formato. Isso ainda é apontado como uma falha no currículo básico dessa disciplina que, por vezes, congela modos de abordagens e conteúdos. É preciso reconhecer o caminho percorrido na construção da matemática a partir de diferentes culturas para se chegar às formalizações conhecidas atualmente. Ao perceber a matemática como uma manifestação de povos e de culturas, o aluno valoriza e se insere no processo de construção dessa disciplina. Embora isso seja mais evidente para disciplinas como geografia e história, a matemática também é resultado de mudanças na sociedade ao longo do tempo, de suas histórias, suas culturas, sua política e sua economia (LOPES; FERREIRA, 2013).

Alguns professores entendem a história como perda de tempo, mas não seria ela uma forma de compreender os antigos processos de abordagem do conhecimento matemático? Sabendo a trajetória, o aluno pode ficar mais interessado pelo

aprendizado do conteúdo e o professor poderá, em alguns casos, responder melhor à recorrente questão de alunos: “por que estudamos esse assunto? Onde vamos usá-lo?”.

No trabalho de Barbin (2002) apud Dias (2014, p. 40), nove pesquisas que aplicaram a história da matemática em sala de aula mostraram resultados positivos, “os alunos perceberam que a matemática não era uma ciência congelada [...], mas ela é viva e fruto da pesquisa, investigação e muitas vezes repleta de dúvidas e erros.”

Em concordância com Moreira e Clareto (2011), a história da matemática pode ser uma ferramenta diferenciada do ensino. Precisamos falar de história da matemática no ensino básico com sensibilidade, cuidado e atenção. A matemática se modificou e se modifica com a sua história, camada a camada.

Para Lopes e Ferreira (2013), é importante perceber a evolução das ideias matemáticas no tempo para que se compreendam os objetivos de seus conceitos. Muito se tentou para confirmar hipóteses – e muitas não foram confirmadas. A crítica à metodologia de ensino da matemática, até mesmo no ensino superior, totalmente dissociada de outras disciplinas, isolada e acabada, exhibe a falta de conexão e de valorização do estudo de sua história. A construção da matemática foi e é totalmente dependente do tipo de ciência desenvolvida em uma determinada época e das relações que se estabeleciam naquele período. Os autores apontam como um erro usar a história apenas para pontuar casos isolados da matemática, como aqueles ligados a descobertas e nomes, colocando que o saber matemático é compreensível apenas para um seleto grupo.

Nesse mesmo sentido, Mendes (2008) coloca que:

A utilização da História da Matemática surge como uma proposta que procura enfatizar o caráter investigatório do processo de construção do edifício matemático, podendo levar os estudiosos dessa área de pesquisa à elaboração, testagem e avaliação de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que pretendem investigar. Ultimamente, o interesse pela História como ferramenta de ensino tem crescido bastante em virtude da busca de contextualização e inserção da Matemática em um meio e em uma época bem definida (MENDES, 2008, p. 40).

Isso reforça que as atividades propostas devem aproveitar documentos históricos escritos importantes para a matemática para reconhecer a forma de abordagem de um conceito no passado. Ao professor, propõe-se colocar o aluno em contato com os “fatores do passado”, quando a matemática, organizada como conhecemos hoje, estava pouco desenvolvida e os conceitos se formavam, em sua maioria, por meio de investigações. Apoiar o ensino de matemática em sua história pode criar caminhos para alcançar, em sala de aula, os objetivos pedagógicos do processo de ensino-aprendizagem.

É preciso quebrar o mito de que a matemática é para poucos, quando, na verdade, nos anos iniciais da educação, ela foi apresentada a poucos. Apenas o “homem branco da elite” era capaz de construir a matemática que conhecemos. O problema é que, por vezes, têm-se registros históricos apenas desses homens. Quando os alunos descobrem a matemática africana ou chinesa, feita por homens e por mulheres e de povos com pouco ou nenhum dos recursos possuídos pelos europeus, começam a enxergar o valor de sua origem e de sua identidade

cultural. Na escola, a abordagem da história matemática pode auxiliar na redução do bloqueio psicológico construído sobre essa disciplina, pois permite ao aluno se inserir no contexto de diversas formas. Pode-se abordar, por exemplo, a etnomatemática (LOPES; FERREIRA, 2013).

Toda a discussão volta-se para a tentativa de melhorar a relação entre aluno-disciplina, especificamente com a matemática, que é tão “temida”. Contudo, introduzir a história na educação básica não é simples, pois exige do docente estudo, pesquisa, força de vontade e trabalho. Mais difícil ainda será se a história da matemática não for abordada com a sua devida importância no curso de formação de professores de matemática.

Nesse interim, para a construção das atividades apresentadas neste livro, seguiu-se a mesma linha de pesquisa dos trabalhos de Mendes (2008), Martines e Bonfim (2011) e Oliveira e Alvim (2020), sendo pesquisadas, apresentadas e solicitadas a resolução dos problemas de contagem publicados em trabalhos científicos de três cientistas do século XVII: Bernard Frenicle de Bessy (1604?-1674), Blaise Pascal (1623-1662) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Vale lembrar que, no século XVII, a ciência estava fortalecida com a existência de universidades, de sociedades científicas e de revistas para a publicação de resultados. Com isso, o estudo da análise combinatória já se aproximava do estudo atual, embora ainda não fossem apresentadas fórmulas prontas.

Para a elaboração das atividades, foram seguidas as recomendações de Mendes (2008), de que:

as atividades históricas devem ser elaboradas de modo a imprimir maior significação à matemática escolar, pois o conhecimento histórico pode estar implícito nos problemas suscitados na atividade ou explícito nos textos históricos resgatados de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos históricos) ou secundárias (informações de livros de História da Matemática ou de livros paradidáticos) (MENDES, 2008, p. 40).

Dias (2014) acrescenta que o uso de fontes primárias, no contexto da história da matemática em sala de aula, fortalece a tomada de consciência sobre o que é matemática, permitindo a análise dessa disciplina em diferentes épocas e contextos.

Nesse sentido, as atividades apresentadas neste livro propõem o uso dos escritos originais dos cientistas para a aprendizagem da resolução de problemas de contagem. Ressaltamos que não temos a intenção de destacar ou de valorizar apenas os estudos dos cientistas do século XVII, mas informamos que esses escritos originais foram os únicos encontrados disponíveis na íntegra e passíveis de leitura e de tradução para a realização das atividades no formato apresentado neste livro.

A adequação das atividades aos alunos do 8º ano do ensino fundamental se ampara na habilidade da BNCC “(EF08MA03)¹ Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.” (BRASIL, 2018a, p. 313). É importante ressaltar que as atividades também podem ser aplicadas aos alunos do ensino

1 EF08MA03A – Significado das siglas: EF = ensino fundamental; 08 = 8º ano; MA = matemática; 03 = numeração sequencial das habilidades do ano (BRASIL, 2018a, p. 30).

médio, segundo a habilidade “(EM13MAT310)² Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore” (BRASIL, 2018b, p. 529).

Para além do currículo, as atividades propostas voltam-se a uma faixa etária em que se encontram os alunos do 8º ano, entre 12 e 13 anos. Conforme relembra Terra (2005), no estudo de Jean Piaget (1896-1980) sobre os estágios de desenvolvimento humano, é dos 12 anos em diante que o indivíduo se encontra na fase de ampliação das capacidades conquistadas até então, sendo capaz de reconhecer o abstrato e de desenvolver operações mentais e lógicas. Pela tese de Piaget, é nessa fase em que se alcança o equilíbrio intelectual que será mantido na vida adulta (TERRA, 2005). Dessa maneira, é interessante aproveitar esse momento especial do desenvolvimento cognitivo para abordar a história da matemática.

Miguel e Miorim (2017) destacam a carência de estudos na área de educação matemática que sejam substanciais a educadores e pesquisadores iniciantes. Eles defendem a necessidade de produtos apoiados nas novas tendências curriculares dos ensinos fundamental, médio e superior.

De fato, após serem realizadas pesquisas na área para a construção deste texto, poucas informações históricas confiáveis foram encontradas e verificou-se uma falta de

2 EM13MAT310 – Significado das siglas: EM = ensino médio; 13 = a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio; MAT = matemática; 310 = 3 indica que a habilidade está relacionada à 3ª competência específica de matemática e 10 indica sua numeração sequencial no conjunto de habilidades relativas a cada competência da BNCC (BRASIL, 2018b, p. 34).

detalhamento sobre a história da análise combinatória, se comparada à documentação histórica dos conteúdos de geometria, álgebra e aritmética, por exemplo, além de poucos estudos recentes voltados ao assunto. Com isso, considerando que a análise combinatória abrange problemas de contagem que podem ser resolvidos com operações simples de adição e de multiplicação, a história apresentada aqui trata do pensamento aritmético e combinatório.



HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA POSSIBILIDADE DE ENLACE

Embora a análise combinatória, nos moldes como a conhecemos hoje, repleta de fórmulas, seja relativamente recente na matemática, os problemas de contagem que estão ligados à aritmética surgiram na Antiguidade. Para Eves (2004, p. 25), “usualmente se considera a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandezas, forma e número.” Por isso, parte-se do conceito de número e dos primeiros processos de contagem para investigar a história da matemática e, conseqüentemente, da análise combinatória. Este conteúdo é resultado de estudos sistemáticos dos métodos de contagem, que partiram da necessidade de contar os elementos de um agrupamento ou a quantidade de agrupamentos formados sob condições pré-estabelecidas.

Eves (2004) apresenta que as contagens tiveram início antes mesmo dos primeiros registros históricos, sendo aprimoradas com a evolução das comunidades humanas para determinar diversas quantidades. Com o aperfeiçoamento da necessidade de contar, houve uma melhora do sistema de registro das contagens nos diferentes povos. Os escribas e os sacerdotes egípcios usavam hieróglifos (Figura 1) para representar seu sistema de numeração, baseado na ideia de agrupamentos simples.

Figura 1: Sistema de numeração egípcio (hieróglifos egípcios).

Numeração decimal	Hieróglifo	Significado
1		Trço vertical
10		Asa, semelhante a uma ferradura
100		Corda enrolada
1000		Flor de Lótus
10 000		Dedo levantado, ligeiramente inclinado
100 000		Girino
1 000 000		Homem ajoelhado levantando os braços

Fonte: IFRAH, 1997.

Nesse sistema, símbolos específicos representavam certos números, os quais eram agrupados para formar outros números. Este sistema evoluiu para o sistema de agrupamentos multiplicativos com os chineses e os japoneses (EVES, 2004).

Dentre os diversos estudiosos apontados pela história que estavam envolvidos no processo de construção e de formalização da análise combinatória, alguns se encontram envolvidos no contexto de probabilidade ligado aos princípios de contagem (FONSECA, 2015).

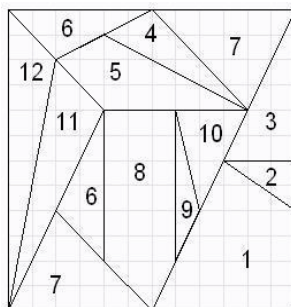
Em algum momento da história, com a estabilização das civilizações e por praticidade, o número e a contagem se fizeram necessários na agricultura, na criação de animais, entre outras atividades. Só o homem possui tal capacidade de contar, de associar algo abstrato a coleções de objetos (BASTOS, 2016). Com o aperfeiçoamento dos sistemas, imagina-se que, na Antiguidade, os problemas de contagem surgiram para dar

solução também a diferentes tipos de jogos, quantificando possíveis resultados.

Dentro da história da análise combinatória, Bastos (2016) relembra as contribuições egípcias, registradas em seus papíros e nas paredes das pirâmides, com problemas cuja resolução pode se apoiar no Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Os gregos também contribuíram, com nomes como Euclides de Alexandria (325 a.C. - 265 a.C.), que escreveu sobre os coeficientes do desenvolvimento do binômio, e Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.), que publicou o *Stomachion* (estômago, em grego; Figura 2) – semelhante a um quebra-cabeça com quatorze peças planas que envolve o raciocínio combinatório para reconhecer as diferentes possibilidades de encaixe das peças.

Figura 2: *Stomachion* apresentado por Arquimedes.

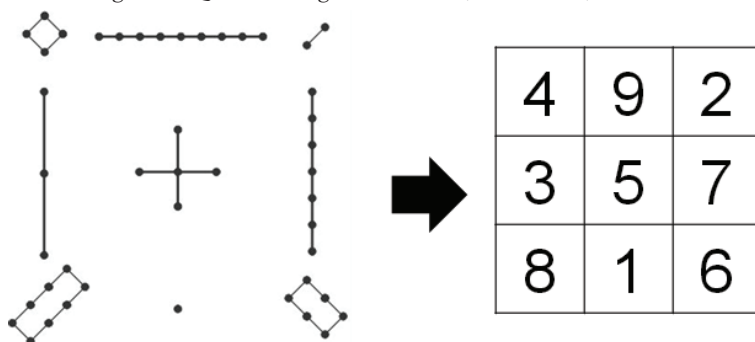


Fonte: BASTOS; VICTER; LOPES, 2016.

Os chineses contribuíram com o seu sistema de numeração, com os quadrados mágicos (Figura 3), com a representação do triângulo aritmético e com cálculos de raízes quadradas e cúbicas. Os indianos colaboraram com seu sistema de

numeração e seus livros de combinatória e do triângulo aritmético (BASTOS, 2016).

Figura 3: Quadrado mágico de Lo Shu, de ordem 3, soma 15.



Fonte: Adaptado de SANTINHO; MACHADO, 2006.

Segundo Katz (2009), os primeiros registros de combinações com um significado conhecido atualmente apareceram na Índia, embora não existam evidências consistentes para tal afirmação. Um tratado médico indiano do século VI Antes da Era Comum (A.E.C.) apresenta o total de combinações que podem ser feitas com seis gostos distintos, amargo, azedo, salgado, adstringente, doce e quente, sob diferentes agrupamentos. Já no século VI da Era Comum (E.C.), há registros de um trabalho do matemático e astrônomo indiano Varahamihira (505-587) sobre combinações de 16 substâncias agrupadas de 4 em 4 (C_4^{16}) para a produção de perfumes. Cerca de três séculos depois, formalizações começaram a surgir com o indiano Mahavira (800-870), que apresentou um procedimento (fórmula) para calcular o número de combinações, embora não haja informações sobre o contexto em que essas combinações foram contabilizadas (KATZ, 2009).

Com isso, já se tinha conhecimento, na Índia do século IX, sobre as fórmulas para cálculos de combinações e de permutações, sendo que as evidências formais dessas fórmulas aparecem apenas no século XIII. Estudiosos indianos como al-khalil ibn ahmad (717-791) que desejou quantificar as palavras que poderiam ser formadas com 2, 3, 4 e 5 letras do alfabeto árabe de 28 letras, se interessavam pela análise combinatória (KATZ, 2009). Esse mesmo autor comenta, ainda, que os métodos de contagem indianos também estavam nas possíveis soluções de sistemas de equações com 10 incógnitas. Mais longe ainda foi Ahmad al-Ab'dari ibn Mun'im (?-1228) ao apresentar o cálculo do número de combinações de p elementos de um conjunto de n elementos. No contexto indiano, Katz (2009) mostra que houve a necessidade de se determinar as possíveis combinações para produzir Tassel³ de seda de diferentes cores a partir de 10 opções distintas.

Segundo Katz (2009), Abul-'Abbas Ahmad al-Mar-rakushi ibnal-Bannā (1256-1321), sucessor de ibn Mun'im, no Marrocos, foi quem reutilizou a fórmula do padrão multiplicativo para encontrar combinações e permutações que já haviam sido usadas na Índia. As combinações, nesse caso, eram tratadas para além de situações reais, voltadas ao abstrato. Próximo ao período de vida de ibnal-Bannā, as fórmulas de permutação também foram estudadas pelo francês Levi ben Gershon (1288-1344), na Europa.

Tavares e Brito (2005) apontam Blaise Pascal (1623-1662) como um dos precursores da análise combinatória, com um triângulo formado por números, além de outros pesquisadores conhecidos que estudaram o assunto, como Pierre de

3 Ornamento para acabamento de tecidos e roupas.

Fermat (1601-1665), Bernard Frenicle de Bessy (1604?-1674), Christiaan Huygens (1629-1695) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).

Antes mesmo desses estudiosos, Katz (2009) relata o interesse da combinatória pela comunidade judaica em escritos do século VIII da Era Comum para calcular as maneiras de se organizar as 22 letras do alfabeto hebraico. O interesse nesse cálculo era voltado a questões religiosas, sob a defesa de que Deus criou os elementos do mundo para serem combinados. Com um olhar voltado para a astronomia, Katz (2009) afirma que o rabino e filósofo espanhol-judeu Abraham ben Meir ibn Ezra (1090-1167) apresentou o número de possíveis combinações (conjunções) dos sete “planetas” (incluindo o Sol e a Lua). A crença da época era que essas combinações exerciam influência na vida do homem.

Para valorizar esses estudos e registros, concorda-se com o que é defendido por Miguel et al. (2009, p. 16) no livro sobre a história da matemática no ensino de geometria e de trigonometria:

A história da matemática [...] coloca muitas questões acerca das concepções de verdade, de rigor, de demonstração, de definições e de sistemas de registros de representação [...] nos incita a aprofundar nossas reflexões enquanto professores de Matemática que se propõem educadores (MIGUEL et al., 2009, p. 16).

Para Fonseca (2015), a análise combinatória ensinada apenas usando fórmulas revela-se um conteúdo de difícil abordagem para alunos e professores. Pesquisas no assunto vêm, portanto, para apoiar o ensino desse conteúdo, em uma

tentativa de minimizar a dificuldade na aprendizagem. O autor ressalta que ainda são poucas as pesquisas sobre a história relacionada à análise combinatória, embora, como mencionado, tenham-se relatos do surgimento dos métodos de contagem desde o desenvolvimento de sistemas numéricos.

No trabalho de Silva, Silva e Silva (2016), a ideia foi alinhar passado e presente na aplicação de atividades de combinatória baseadas na história da matemática para alunos da 3ª série do ensino médio, modalidade EJA, de uma escola estadual da Paraíba. A conclusão principal dos autores, enquanto professores de matemática, é, certamente, unânime para as pesquisas da área: “Os dados revelaram que contextualizar historicamente os conteúdos, possibilita que os discentes percebam a importância e a utilidade daquilo que estudam, quebrando a concepção que a matemática está pronta e acabada.” (SILVA; SILVA; SILVA, 2016, p. 1)

Essa é a principal base para o uso da história da matemática como ferramenta de ensino. Enxerga-se o aluno no direito que conhecer como a análise combinatória era estudada no passado e quais as semelhanças entre esses estudos e a forma como ela é conhecida atualmente. O conhecimento da interpretação dos conceitos no passado para a construção de tal conteúdo pode abrir caminhos para as interpretações de problemas atuais.



SÉCULO XVII: CONTRIBUIÇÕES DE TRÊS PERSONAGENS EUROPEUS

A seguir, apresentamos uma breve história de vida dos cientistas citados nas atividades apresentadas neste livro, dando destaque aos fragmentos de interesse das obras selecionadas para posterior apresentação das atividades propostas. O reconhecimento da vida dos cientistas intenciona mostrar o contexto em que viveram. A seleção dos autores se baseia nos registros históricos da matemática disponíveis na íntegra para uso, os quais mostram a participação desses cientistas no estudo da análise combinatória e o alinhamento de seus escritos entre si. Contudo, o principal motivo que nos levou a essa seleção é o fato de não existirem publicações de atividades baseadas neste conjunto de obras específico, no formato proposto neste livro, que valoriza os escritos originais. A apresentação dos três autores e de suas obras segue a ordem de suas datas de nascimento.

4.1 BERNARD FRENICLE DE BESSY (1604?-1674)

O matemático amador Bernard Frenicle de Bessy nasceu por volta de 1604 e faleceu em 1674, em Paris, França. Segundo O'Connor e Robertson (2014), existem poucos registros sobre a vida e os feitos de Frenicle⁴. Até onde os autores indicam, Frenicle possuía formação em direito e, junto ao seu

4 Neste texto, utiliza-se o sobrenome Frenicle diante de sua predominância nas publicações sobre esse cientista.

pai e ao seu irmão, ocupava um cargo oficial importante no Tribunal de Monnaies⁵, em Paris. Registros indicam a ocorrência de correspondências entre Frenicle e René Descartes (1596-1650), Christiaan Huygens (1629-1695), o monge francês Marin Mersenne (1588-1648) e, especialmente, Pierre de Fermat (1607-1665). Em suas correspondências, discutiam assuntos sobre física, matemática e principalmente sobre a teoria dos números e a trajetória de um corpo em movimento. Alguns historiadores afirmam que Frenicle se destacou por resolver, de forma rápida e precisa, diversos problemas matemáticos, a maioria deles proposto por Fermat (O'CONNOR; ROBERTSON, 2014).

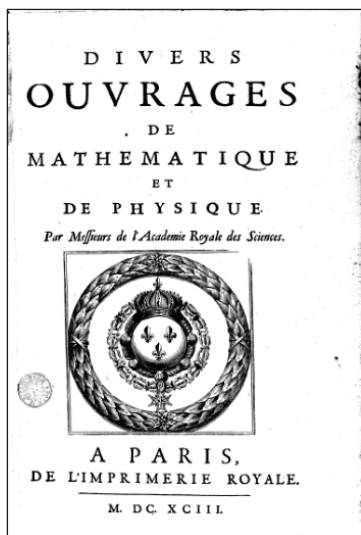
Quase 20 anos após seu falecimento, em 1693, foram publicados quatro livros de sua autoria, intitulados *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (Vários Trabalhos de Matemática e Física; Figura 4). Além de Frenicle, esse livro compila escritos de outros seis cientistas franceses: Gilles Roberval (1602-1675), Jean Picard (1620-1682), Edme Mariotte (1620-1684), Adrien Auzout (1622-1691), Christiaan Huygens e Ole Christensen Rømer (1644-1710).

As publicações de Frenicle denominadas *Des quarrez magiques* (Quadrados mágicos, p. 423-483) e *Tabela générale des quarrez magiques de quatre de côté* (Tabela geral dos quadrados mágicos de quarta ordem, p. 484-507) falam sobre quadrados mágicos. Nessa última publicação, Frenicle apresentou 880 quadrados mágicos de ordem 4 e métodos de construir quadrados mágicos de qualquer ordem, mostrando a

5 Instituição do governo francês responsável pela produção das moedas de escudo (moeda da França no século XVII).

conexão entre Frenicle e a análise combinatória (O'CONNOR; ROBERTSON, 2014).

Figura 4: Folha de rosto da obra *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (1693), da Academia Real de Ciências de Paris.



Fonte: Académie Royale des Sciences, Paris, 1693.

Para Martines e Bonfim (2011, p. 32), “o significado dos quadrados mágicos é que eles fornecem os primeiros exemplos de uma importante faceta da combinatória moderna – o estudo dos mecanismos que satisfaçam as condições atribuídas”. Com isso, o quadrado trabalha com a ideia de arranjo, em que a ordem de disposição dos números importa.

Outros manuscritos de destaque de Frenicle, que também falam sobre análise combinatória, denominam-se *Methode pour trouver la solution des problèmes par les exclusions* (Método para encontrar a solução de problemas por exclusões, p. 1-44) e *Abregé des combinaisons* (Combinações abreviadas, p. 45-64),

que são tratados publicados na obra *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (Figura 4). As publicações que estão nessa obra foram feitas em nome da *Académie Royale des Sciences* de Paris, da qual Frenicle foi membro fundador (O'CONNOR; ROBERTSON, 2014).

Portanto, a obra une publicações dos principais cientistas franceses do século XVII. É uma coleção de 31 tratados, considerados de destaque, da Academia Real de Ciências da França, fundada em 1666. Entre os membros fundadores estavam, além de Frenicle, Roberval, Huygens e o astrônomo Picard (O'CONNOR; ROBERTSON, 2004). As contribuições de Frenicle de Bessy para a análise combinatória tornaram os tratados *Abregé des combinaisons* e *Des quarrez magiques* a base para a construção das atividades propostas neste livro.

Analisando o prefácio da obra *Divers ouvrages de mathématique et de physique*, nota-se que os escritos são da Academia de Ciências da França sobre os fatos que precederam a sua publicação e alguns comentários sobre o conteúdo de cada tratado. Com o falecimento de Frenicle e de Roberval, os manuscritos originais dessa obra ficaram com Picard, sendo, posteriormente, transmitidos a Philippe de la Hire (1640-1718), o qual escolheu os tratados de Frenicle como os primeiros a serem apresentados (O'CONNOR; ROBERTSON, 2014). A Academia destaca ao leitor que se deve ter cuidado ao analisar os conteúdos de geometria de Roberval, pois eles contêm erros.

Frenicle é o autor da primeira publicação da obra *Methode pour trouver la solution des problèmes par les exclusions* e trata da criação de regras para a resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos, apresentando 10 exemplos que não são

de interesse deste livro por serem problemas de geometria. Já na segunda publicação de Frenicle (*Abregé des combinaisons*), é possível encontrar diversos exemplos de combinações, que serão comentados.

As análises de duas das publicações de Frenicle de Bessy (*Abregé des combinaisons* e *Des quarrez magiques*) em um mesmo livro foram feitas a partir da versão original escrita em francês e publicada em 1693, que se encontra disponível na internet (ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, 1693). Foi feita uma tradução própria.

4.11 ABREGÉ DES COMBINAISONS E DES QUARREZ MAGIQUES: POSSIBILIDADE DE USO EM SALA DE AULA

No início de seu texto, é possível notar que Frenicle descreve a base principal da combinação de elementos. Assim, tomadas duas maneiras distintas de se desenvolver uma atividade, que ele chama de conjunções, o total de possibilidades será o produto entre essas duas maneiras. Se houver uma terceira maneira diferente das anteriores, faz-se o produto das três, e assim por diante. Essa descrição é compatível com o conceito do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que trata do produto entre as etapas da quantificação de possibilidades que ocorrem de forma independente umas das outras. Por isso, Frenicle comenta que a segunda combinação já pode ser tratada como a combinação de mudança, assim como a terceira e as demais que ocorrerem em dada situação. Ele reforça que esse produto deve ser feito de forma organizada, trazendo exemplos: “de quantas maneiras pode ser arranjado um determinado número de soldados?”, “de quantas formas diferentes podem ser feitas determinadas figuras?”, ou ainda

“quantos podem ser os anagramas de um conjunto de letras (se eles podem ser pronunciados ou não)?”.

A partir dessas questões, Frenicle comenta que devem ser consideradas as variedades de disposições dos elementos, considerando o uso de 6 letras para compor anagramas, por exemplo. Se houve alguma letra repetida, a quantificação das maneiras irá mudar em relação a uma situação com todas as letras distintas. Ele exemplifica isso com a combinação de homens em diferentes posições, explicando que as variedades devem ser separadas, já que um homem não pode estar em dois lugares ao mesmo tempo.

Nessa apresentação do conteúdo, entende-se que Frenicle discute o cuidado em se quantificar maneiras, considerando as exceções antes de realizar as operações. Nesse caso, podemos exemplificar com a determinação da quantidade possível de números com 3 algarismos distintos. Como desejamos números de 3 algarismos, o 0 não poderá ocupar a casa das centenas, então a quantificação das combinações começa por essa exceção.

Sob o título “Combinação de ordem” (*Combinaiton d’ordre*, p. 45), Frenicle começa a quantificar a posição de elementos. Ele mostra que se existem dois elementos para serem dispostos em duas posições, só existem 2 possibilidades para cada, isto é, ou na primeira ou na segunda posição. Então, a quantidade seria o produto de 2 por 1. Em seguida, Frenicle apresenta o fatorial dos números naturais de 1 a 22 por meio do que ele chama de “tabela” (Figura 5).

Embora Frenicle não tenha usado o termo “fatorial”, ele explana que as combinações de um número de elementos são resultado do produto entre o número de elementos que se

deseja pelo número de combinações da quantidade de elementos anterior.

Figura 5: Fragmento 1 de *Abregé des Combinaisons*, de Frenicle de Bessy, pg. 46.

ABREGÉ DES COMBINAISONS.	
1	1.
2	2.
6	3.
24	4.
120	5.
720	6.
5040	7.
40320	8.
362880	9.
3628800	10.
39916800	11.
479001600	12.
6227020800	13.
87178291200	14.
1307674368000	15.
20922789888000	16.
355687428096000	17.
6402373705728000	18.
121645100408832000	19.
2432902008176640000	20.
51090942171709440000	21.
1124000727777607680000	22.

Fonte: Académie Royale des Sciences, Paris, 1693.

Em seguida, ele apresenta as formas e a quantidade de maneiras de se dispor as letras *o*, *b*, *i* e *e*, formando anagramas. Ele consegue determinar que, como todas as letras são distintas, existem $4.3.2.1 = 24$ maneiras distintas de se combiná-las.

Essa parte do texto foi utilizada na elaboração do exercício 3.2 (Figura 31).

Partindo do exemplo das 4 letras, é mostrado que o mesmo vale para o caso com 5 letras e 6 letras, que terão 120 e 720 combinações possíveis, respectivamente. Entretanto, Frenicle ressalta que o modo de cálculo para a determinação das combinações quando algumas letras se repetem é diferente. Para explicar, ele utiliza a palavra *ebene*, traduzida como “nível” para o português. Nesse caso, como a letra *e* se repete três vezes, ele afirma que as combinações são determinadas pelo quociente entre a combinação das cinco letras e a combinação de três, ou seja, 120 dividido por 6, resultando em 20 combinações. Aqui, Frenicle está usando a regra da permutação com repetição, que conhecemos hoje por:

$$P_n^{x,y,z} = \frac{n!}{x! y! z!}$$

Em que n é a quantidade de elementos a serem permutados e x, y e z são os números dos elementos que se repetem dentro o total. Essa parte do texto de Frenicle foi usada no exercício 4.1 (Figura 33).

Sob o título “Combinação geral” (*Combinaison générale*, p. 48), Frenicle traz uma seção dos casos em que as combinações são determinadas pela potência do número de elementos. Seu exemplo mostra as possíveis cartas que podem ser retiradas em um jogo, com reposição. Em um baralho com 36 cartas, se forem retiradas 12, uma de cada vez, com reposição, a possibilidade total de combinações das cartas será a 12ª potência de 36, pois sempre haverá 36 cartas a serem retiradas. Essa parte da obra foi usada no exercício 3.3 (Figura 32).

Na seção sobre combinação de mudança ou de escolha (*Combinaison de changement ou de choix*, p. 49), Frenicle explica que quando existem vários elementos semelhantes, há pouca variação de ordem na construção das combinações. Para exemplificar, ele coloca que se tivermos quatro letras diferentes, serão 24 combinações, porém, se nessas quatro houver duas iguais e outras duas diferentes, como a, a, b, c , teremos 12 combinações. Isso segue para a, a, a, b , que resulta em 4 combinações, a, a, b, b , com 6 combinações, e a, a, a, a , que só podem ser organizadas em um tipo e não têm ordem. Esse conteúdo foi abordado no exercício 4.2 (Figura 34).

Nesse contexto, Frenicle retoma a situação das cartas. Se das 36 cartas forem retiradas 12, em sequência, sem reposição, o total de combinações será o produto $\underline{36.35.34.33.32.31.30.29.28.27.26.25} = 599\ 555\ 610\ 984\ 320\ 000$. Nesse caso, ele expõe uma situação que conhecemos hoje como “arranjo”, em que a ordem de retirada das cartas importa, tomando-se 36 elementos, 12 a 12:

$$A_{36,12} = \frac{36!}{(36-12)!} = \frac{36!}{24!}$$

Ele ainda acrescenta que se houver agrupamento das 36 cartas em jogos de 12 em 12 cartas, dentro do jogo a ordem pode não importar, e assim, teríamos o que conhecemos hoje como “combinação simples”:

$$C_{12}^{36} = \frac{36!}{12!(36-12)!} = \frac{36!}{12!24!}$$

Depois de tais discussões, Frenicle apresenta três corolários (p. 53-55), em que traz proposições derivadas do que foi

apresentado nas seções anteriores. Embora não use fórmulas, entende-se que o autor busca concluir sobre as condições em que cabem uma resolução por arranjo simples, por permutação simples e com repetição e combinação simples.

Na última seção desse “capítulo”, Frenicle trata de *Hazars* (p. 60), ou seja, de perigos (ou jogos de azar), que não serão objeto de estudo deste livro. Para conhecimento breve, ele aplica os fundamentos das combinações em apostas feitas na cidade italiana de Gênova. Tais apostas eram feitas por banqueiros, envolvendo elevadas quantias de dinheiro, sobre quem seriam os senadores sorteados para utilizar os principais escritórios da República – ele expõe que sortear cerca de 5 dos 100 senadores para utilizar esses escritórios era um hábito local.

Neste mesmo documento, Frenicle falou sobre os quadrados mágicos. O primeiro quadrado apresentado por Frenicle possui ordem 4 e foi preenchido com os números de 1 a 16. Esse quadrado foi utilizado no exercício 5.1 (Figura 35).

A forma de preenchimento do quadrado adotada por Frenicle permitiu que a soma dos números de todas as linhas, colunas e diagonais resultasse em 34. Ele mostra que, em um quadrado de ordem 4, a soma será o produto entre a soma do menor com o maior dos números colocados nas células ($1 + 16 = 17$) e a metade da ordem ($4 : 2 = 2$), ou seja, $17 \times 2 = 34$.

Ele ainda coloca que se a ordem do quadrado for ímpar, 25, por exemplo, é preciso multiplicar a metade da soma dos dois números extremos escritos ($1 + 25 = 26$) pela raiz do quadrado ($\sqrt{25} = 5$), ou seja, $13 \times 5 = 65$. Assim, ele mostra que quando preenchemos um quadrado que possui 25 células com os números de 1 a 25, cada linha, coluna e diagonal terá a

soma 65. Esse trecho da obra foi aproveitado no exercício 5.2 (Figura 36).

Frenicle ressalta que essas duas regras servem só para quadrados que são preenchidos a partir do número 1 e que os números, conforme preenchem o quadrado, crescem de uma em uma unidade. Como os números seguem uma progressão aritmética (PA) de razão 1, notamos, portanto, que a soma é dada pela fórmula da soma de n termos de uma PA finita.

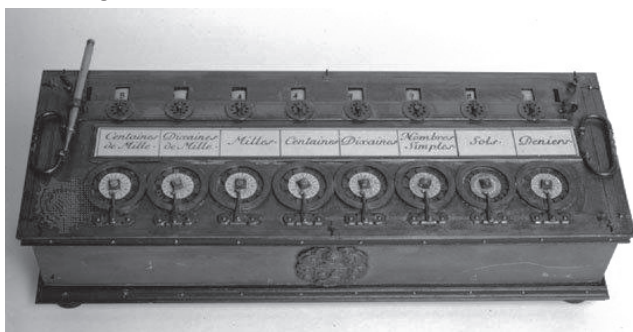
Nas páginas seguintes de seu escrito, Frenicle mostra diversos tipos de quadrados mágicos de ordem 3, 4, 6, 8, entre outros. Ele também traz o método de construção dos quadrados apresentados, escrevendo os 880 quadrados possíveis de ordem 4. Não há apresentação de um algoritmo de quantificação dessas possibilidades. Diante desse número elevado de possibilidades (880), no exercício 5.2 abordou-se um quadrado de ordem 3.

4.2 BLAISE PASCAL [1623-1662]

Filósofo, físico e matemático, Blaise Pascal nasceu em 19 de junho de 1623 em Clermont Ferrand (Auvérnia, França) e morreu 39 anos depois, em 19 de agosto de 1662, em Paris (França). Os primeiros ensinamentos de Blaise vieram apenas de seu pai, Étienne Pascal (1588-1651), um advogado e matemático amador de visão educacional pouco ortodoxa, em decorrência da perda de sua mãe aos 3 anos de idade. Diferentemente do que seu pai desejava, aos 12 anos Blaise já estudava geometria (ADAMSON, 1995; O'CONNOR; ROBERTSON, 1996).

Posteriormente, já com o apoio de seu pai, aos 14 anos, Blaise participava de reuniões lideradas pelo monge francês Marin Mersenne, junto a cientistas da área da matemática, da filosofia, da astronomia e da geometria, incluindo Pierre de Fermat. Esses encontros impulsionaram o desenvolvimento do “hexágono místico”⁶ de Pascal, apresentado em 1639. Isso mostra que, antes dos 20 anos de idade, Pascal já realizava seus próprios estudos em matemática (KATZ, 2009). Em 1640, Blaise publicou *Essay pour les coniques* (Ensaio sobre secções cônicas). Nos anos seguintes, para auxiliar no trabalho de seu pai com a coleta de imposto, Blaise inventou a primeira máquina de calcular, chamada *Pascaline* (Figura 6), usada até 1652 (O’CONNOR; ROBERTSON, 1996).

Figura 6: Calculadora de Blaise Pascal: *La Pascaline*.



Fonte: ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA, 2019.

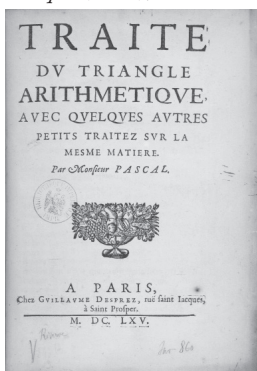
A partir de 1647, Pascal voltou-se ao estudo da física, analisando o vácuo e a pressão atmosférica. Em 1653, Pascal publicou sobre o equilíbrio de líquidos. Nos anos seguintes, continuou seu estudo sobre cônicas. Nos anos finais da

6 Mais detalhes sobre o Hexágono de Pascal podem ser encontrados em: <https://www.geogebra.org/m/RRbJWFEA>.

vida, Pascal focou na publicação de textos religiosos. *Pensées* (Pensamentos) é o trabalho de maior destaque de Pascal em filosofia, publicado após sua morte, em 1670, sobre o sofrimento humano e Deus. Outra obra de destaque de Blaise, publicada em 1665, foi o *Traite Du Triangle Arithmetique* (Tratado do Triângulo Aritmético, Figura 7). Os registros históricos indicam que Blaise Pascal não foi o primeiro a estudar sobre o triângulo aritmético, mas a sua obra foi o trabalho publicado mais importante para o assunto, sendo de considerável contribuição para a análise combinatória (ADAMSON, 1995; O'CONNOR; ROBERTSON, 1996). Diante dessa informação, usamos a referida obra como base para a construção de atividades propostas neste livro.

Segundo O'Connor e Robertson (1996), a continuidade do trabalho de Pascal por Isaac Newton (1643-1727) amparou o desenvolvimento dos coeficientes binomiais e a descoberta do teorema binomial geral. Em contato com Pierre de Fermat, Blaise amparou o desenvolvimento da teoria da probabilidade.

Figura 7: Folha de rosto do *Traite du Triangle Arithmetique* (1665), de Blaise Pascal.



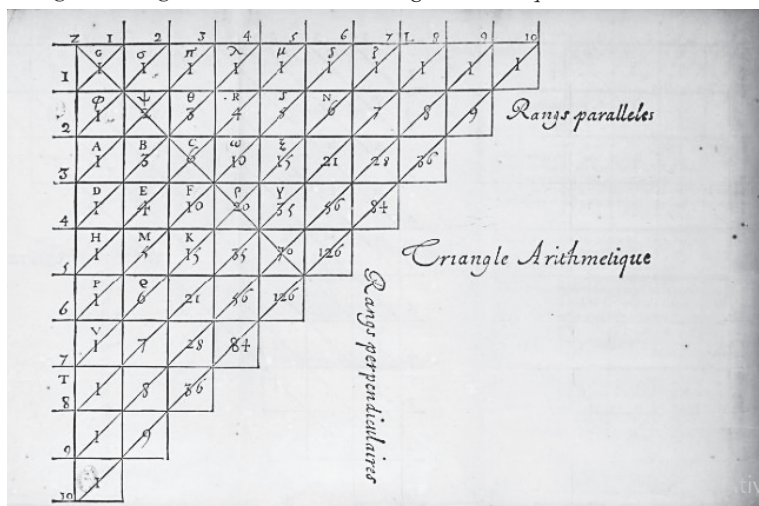
Fonte: PASCAL, 1665.

Para Fossa (2017), autor da tradução para o português do *Tratado sobre o Triângulo Aritmético de Pascal*, esse triângulo propõe o arranjo triangular dos números, desenvolvido de forma semelhante àqueles que vieram antes da época de Pascal. Segundo o autor, Blaise mostra-se mais didático ao demonstrar o triângulo aritmético com detalhes de seu desenvolvimento e aplicação.

A análise da obra de Pascal (*Traite Du Triangle Arithmetique*) foi feita a partir da versão original, escrita em francês em 1665, mas digitalizada e disponível na internet (PASCAL, 1665), e também por meio da tradução da obra para o português feita por John A. Fossa e Fabricio Possebon e publicada em 2013 (PASCAL, 2013). Com isso, todas as traduções apresentadas dessa obra são de autoria de John A. Fossa.

4.2.1 TRAITE DU TRIANGLE ARITHMETIQUE: POSSIBILIDADE DE USO EM SALA DE AULA

No início do conteúdo do documento, Pascal apresenta a construção do triângulo aritmético (Figura 8) e o seu uso em diferentes situações, incluindo as combinações. Nesse tratado, são apresentadas 19 proposições que expõem as propriedades básicas do triângulo aritmético.

Figura 8: Fragmento 1, *Traite du Triangle Arithmetique*, de Blaise Pascal⁷.

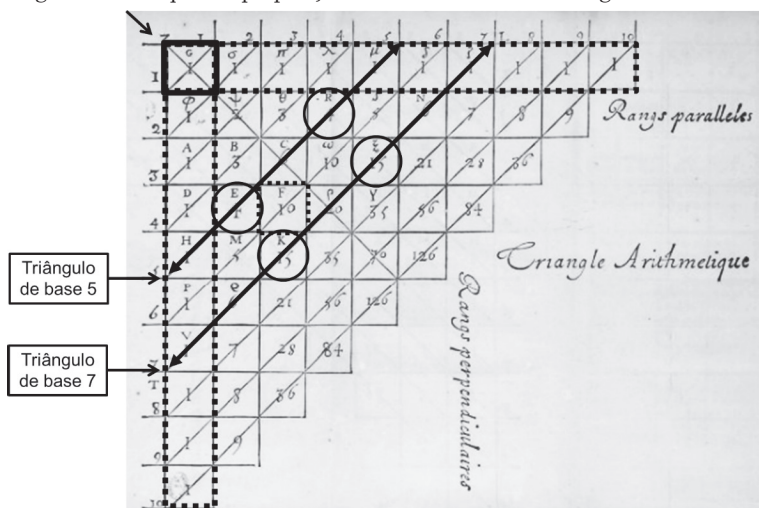
Fonte: PASCAL, 1665.

Pascal descreve que a construção do triângulo inicia-se por um quadrado denominado G e de número 1 (indicado no canto superior esquerdo da Figura 9), a partir do qual são traçadas duas fileiras com dez quadrados cada, uma na vertical e outra na horizontal (destaque pontilhado na vertical e na horizontal na Figura 9). Cada quadrado formado em toda a estrutura é uma *cellule* (célula).

Na Figura 9, *Rangs paralleles* são as fileiras traçadas na horizontal, e *Rangs perpendiculaires* são as fileiras traçadas na vertical. Observe que antes da primeira fileira de células, tanto na vertical quanto na horizontal, existe uma numeração de 1 a 10. Para Pascal, esses números são “*expoentes* das divisões das linhas”. Já a primeira fileira de células, vertical e horizontal, é preenchida com o número 1.

7 No documento original não há indicação de página.

Figura 9: Destaque das proposições de Blaise Pascal no Triângulo Aritmético.



Fonte: Adaptado de PASCAL, 1665.

Para formar o que Pascal chama de *bases* dos triângulos, ele traça linhas diagonais dentro de cada célula. A união dessas diagonais forma as dez bases de triângulos no triângulo aritmético apresentado por Pascal. Na Figura 9, as duas linhas com uma seta em cada extremidade exemplificam triângulos de base 5 e base 7. O triângulo de base 5 é resultado da união das diagonais de 5 células, já o triângulo de base 7 é resultado da união das diagonais de 7 células. Assim, células que têm a mesma base e estão em fileiras verticais e horizontais representadas pelo mesmo par de números são denominadas “células recíprocas”. É possível observar essa ocorrência em E (vertical 2 e horizontal 4) e R (vertical 4 e horizontal 2) no triângulo de base 5 ou em K (vertical 3 e horizontal 5) e ξ (vertical 5 e horizontal 3) no triângulo de base 7, circulados na Figura 9.

Para mostrar uma relação nesse triângulo, Pascal toma de exemplo a célula F, destacada com um quadrado pontilhado na Figura 9. Observe que ela pertence à fileira vertical 3 e à fileira horizontal 4 e que a diagonal dessa célula forma um triângulo de base 6. Ele afirma que a soma da vertical com a horizontal, $3 + 4 = 7$, excede uma unidade da base, 6, e isso ocorre para qualquer outra célula. Escolha uma célula e faça a verificação!

Pascal descreve que o preenchimento das células segue uma regra de que o número de cada célula é igual à soma do número da célula precedente na reta perpendicular (vertical) com o número da célula precedente na reta paralela (horizontal). Essa orientação de preenchimento foi usada no exercício 2.1 (Figura 23). A partir disso, Pascal apresenta 19 consequências. Algumas serão apenas brevemente comentadas na próxima seção, pois não possuem relação direta com o conteúdo de análise combinatória.

4.2.2 CONSEQUÊNCIAS DO TRIÂNGULO ARITMÉTICO

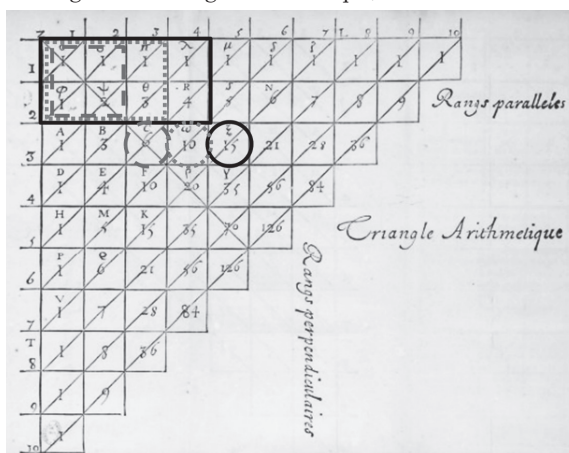
Na primeira consequência, Pascal mostra apenas que as células da primeira fileira horizontal e da primeira vertical de seu triângulo aritmético possuem o número 1, tratando-as como células geradoras. Nenhuma célula completa (quadrado) as precede, por isso, são geradoras e de valor 1. Já na segunda e na terceira consequências, Pascal reapresenta a regra do preenchimento das demais células, reforçando que a soma é acumulativa.

Na consequência quatro, outra soma é relatada. No exemplo, a célula com o número 15 (vertical 5 e horizontal 3, Figura 10) menos uma unidade resulta em 14, sendo igual à soma dos números de quatro pares de células precedentes: $4 + 1, 3 + 1$,

$2 + 1$, $1 + 1$ (destacadas com um retângulo na Figura 10). O mesmo se aplica a todas as outras células. Tomando a célula de número 10 (vertical 4 e horizontal 3, na Figura 10) menos uma unidade, que resulta em 9, nota-se que será o resultado de $3 + 1$, $2 + 1$ e $1 + 1$, posto que são os três pares de células precedentes à célula 10, como destacado com um retângulo pontilhado na Figura 10. A célula de número 6 (vertical 3, horizontal 3) menos uma unidade resulta em 5, que é o resultado da soma de dois pares de células precedentes, $2 + 1$ e $1 + 1$, destacadas com outro retângulo pontilhado na Figura 10. Com os exemplos numéricos, se compreende melhor os escritos de Pascal.

Na tradução em português, Pascal explica isso como: “Em todo triângulo aritmético, cada célula, diminuído pela unidade, é igual à soma de todas as células compreendidas entre suas fileiras e sua fileira perpendicular, exclusivamente.” Ele ressalta que o número a ser subtraído depende da célula geradora, que nesse caso é 1.

Figura 10: Triangle Arithmetique, de Blaise Pascal



Fonte: PASCAL, 1665.

A quinta e sexta consequências tratam da igualdade do que ele denominou “células recíprocas”, já comentadas na seção anterior (4.2.1) com auxílio da Figura 9. Na sétima e oitava consequências, ele apresenta que, se forem somados os valores das células na diagonal, um de cada vez, a soma das células diagonais mais à direita será o dobro da soma das células diagonais mais à esquerda. Para exemplificar, tomaremos a primeira célula 1, denominada G: as outras duas células da próxima diagonal são 1 e 1, que somadas resultam em 2, que é o dobro de 1. Nas próximas três células da diagonal têm-se $1 + 2 + 1 = 4$, que é o dobro da soma das células diagonais anteriores, 2, e assim por diante.

A partir da décima consequência, todas as demais relatam relações de semelhança entre valores obtidos por meio da comparação de células, que não serão apresentadas neste livro por não terem ligação direta com o conceito de análise combinatória.

4.2.3 SOBRE AS COMBINAÇÕES

Indo ao assunto de interesse deste livro, discute-se sobre umas das aplicações do triângulo aritmético mostrada por Pascal em *Pour Les Combinaisons* (As Combinações, p. 4). No início do tópico, Pascal explica seu ponto de vista sobre a definição de “combinação”: “Quando, de várias coisas, faz-se uma escolha de um certo número delas, todas as maneiras possíveis de tomar aquele tanto de todas as referidas coisas, são aqui chamadas de diferentes combinações” (PASCAL, 2013, p. 74).

Para exemplificar sua definição, Pascal representa quatro elementos pelas letras A, B, C e D. Com a combinação desses 4, tomados 2 a 2, encontraremos 6 combinações diferentes:

AB, AC, AD, BC, BD e CD. Com esse resultado, fica claro que Pascal estava falando sobre o cálculo de combinações em diferentes agrupamentos. Atualmente, o exemplo de Pascal seria representado por:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Ele desconsidera combinações com a mesma letra, como AA ou BB, assim como considera AB equivalente a BA, comentando que a ordem dessas combinações não importa. Em seguida, Pascal discute as combinações de 3 em 3, tendo os exemplos ABC ou ABD. Para concluir, como mostra a Figura 11, Pascal resume as combinações de duas maneiras. Parte dessa figura foi usada para a realização do exercício 1.1.

Figura 11: Fragmento 2 de *Traite du Triangle Arithmetique*, de Blaise Pascal, pg. 4.

Je parleray donc en ces termes.

1	dans	4	se combine	4	fois.
2	dans	4	se combine	6	fois.
3	dans	4	se combine	4	fois.
4	dans	4	se combine	1	fois.

Où ainsy.

La multitude des combinaisons de 1 dans 4 est 4.
La multitude des combinaisons de 2 dans 4 est 6.
La multitude des combinaisons de 3 dans 4 est 4.
La multitude des combinaisons de 4 dans 4 est 1.

Fonte: PASCAL, 1665.

Pela figura anterior, temos as combinações C_1^4 , C_2^4 , C_3^4 e C_4^4 , cuja soma será 15. Após esse exemplo, Pascal apresenta 4 lemas. Basicamente, esses lemas fazem várias ressalvas às combinações:

- Não é possível agrupar elementos maiores que o total de elementos, isto é, 2 elementos agrupados 4 a 4;
- As combinações com agrupamento igual ao total de elementos serão sempre 1, como $C_4^4 = C_2^2 = 1$;
- Elementos combinados 1 a 1 sempre resultam no total de elementos, por exemplo, $C_1^4 = 4$.

Como o Lema IV é mais elaborado, vale a sua citação:

Se houver quatro números quaisquer, sendo o primeiro arbitrário, o segundo maior pela unidade, o terceiro arbitrário, embora não menor que o segundo, e o quarto maior que o terceiro pela unidade, então a quantidade de combinações do primeiro no terceiro, junto com a quantidade de combinações do segundo no terceiro, será igual à quantidade de combinações do segundo no quarto (PASCAL, 2013, p. 77).

A exemplificação numérica de Pascal esclarece melhor esse lema: se forem tomados 4 números, 1, 2, 3 e 4, a quantidade de combinações de 3 deles, 1 a 1, mais a quantidade de combinações de 3 deles, 2 a 2, será igual à quantidade de combinações de 4 deles, 2 a 2. Pascal demonstrava o que conhecemos hoje por Relação de Stifel:

$$C_p^n + C_{p+1}^n = C_{p+1}^{n+1}$$

Em que n é a quantidade de elementos a serem combinados e p refere-se aos agrupamentos.

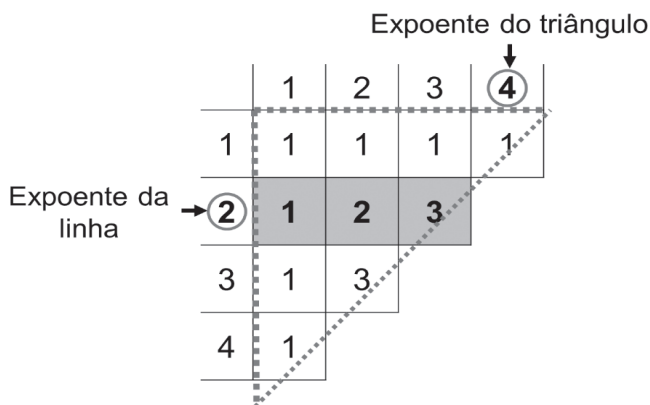
Em seguida, para compreender a conexão das combinações com o triângulo aritmético, Pascal traz duas proposições e um problema (proposição III). A primeira proposição foi

utilizada no exercício 2.2 (Figura 25) e a segunda, no exercício 2.3 (Figura 27).

Pascal propõe, inicialmente, que “a soma das células de uma fileira paralela (horizontal) qualquer é igual à quantidade de combinações do expoente da fileira horizontal no expoente do Triângulo” (PASCAL, 2013, p. 79).

Para compreender melhor essa proposição, vamos observar a Figura 12, que representa um fragmento do triângulo aritmético desenhado por Pascal.

Figura 12: Ilustração do exemplo de Pascal para a Proposição I.



Fonte: Gerado pelas autoras, 2020.

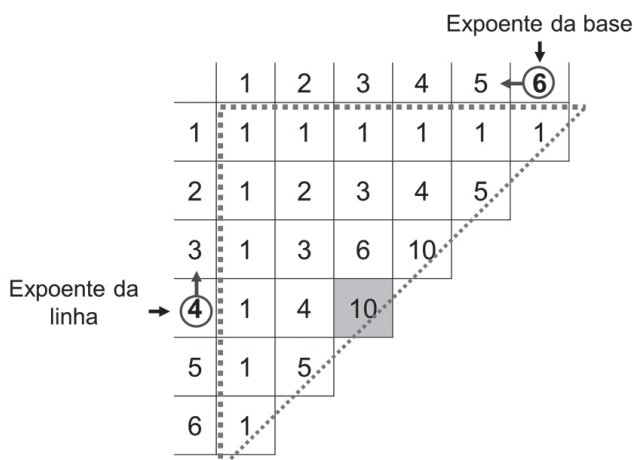
Observe que este fragmento representa um triângulo de base 4, tomando como referência as linhas diagonais apresentadas na figura original (Figura 8). Com isso, 4 será o expoente do triângulo, pois é o número de sua base. Iremos também selecionar uma fileira horizontal qualquer desse triângulo, como a fileira 2. Com isso, 2 será denominado o “expoente da linha”. Logo, usando o exemplo dado por Pascal, se tivermos

um triângulo até o expoente 4, somando os números da linha 2 ($1 + 2 + 3$) escolhida, teremos 6, que é o resultado da combinação de 4 elementos tomados 2 a 2 (C_3^5).

Na proposição II: “O número de qualquer célula é igual à quantidade de combinações do expoente da sua fileira paralela, menos a unidade, no expoente da sua base, menos a unidade” (PASCAL, 2013, p. 80). Nessa segunda proposição, “expoente da base” é sinônimo de “expoente do triângulo”, apresentado na proposição anterior. Na Figura 13, exemplifica-se a proposição.

No exemplo, escolhemos a célula 10; esse valor é igual à combinação de 5, 3 a 3 (C_3^5), pois 5 é o expoente da base menos uma unidade e 3 é o expoente da linha menos uma unidade.

Figura 13: Ilustração do exemplo de Pascal para a Proposição II.

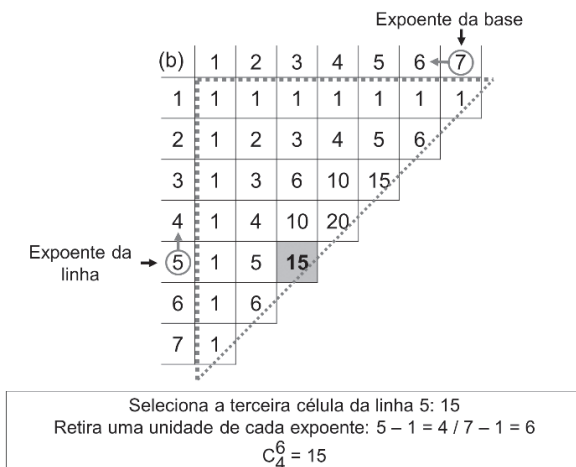
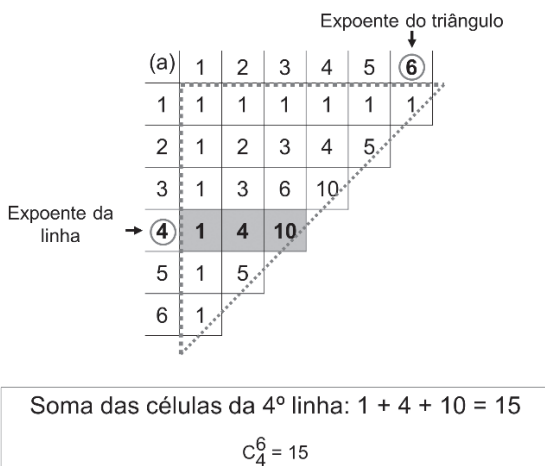


Fonte: Gerado pelas autoras, 2020.

O problema proposto por Pascal em sua terceira proposição aplica as proposições I e II já citadas: “Dados dois números, determinar, usando o Triângulo Aritmético, quantas vezes

um combina noutro” (PASCAL, 2013, p. 81). Pascal escolhe os números 4 e 6. A Figura 14 abaixo mostra a resolução pelos dois métodos.

Figura 14: Ilustração da resolução de Pascal para a Proposição III (problema) pela Proposição I (a) e Proposição II (b).



Fonte: Gerado pelas autoras, 2020.

4.3 GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716)

Filósofo e matemático, Gottfried Wilhelm von Leibniz nasceu em 1º de julho de 1646, na Lísia (Saxônia, Alemanha), e morreu 70 anos depois, em 14 de novembro de 1716, em Hanover (Saxônia, Alemanha). A filosofia defendida por Leibniz possui reflexos dos valores morais e religiosos de sua mãe em decorrência da perda de seu pai aos 6 anos de idade. Entretanto, muitas obras deixadas por seu pai, um professor de filosofia moral, foram base para as proposições de Leibniz (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998).

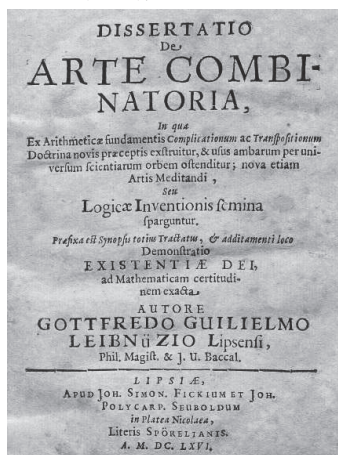
Conhecendo latim e grego ao longo dos anos escolares, Leibniz se interessou por lógica e pela teoria de Aristóteles, a partir da qual deu início ao desenvolvimento de suas próprias ideias e teorias. Aos 14 anos de idade, já ingressava na Universidade da Lísia para estudar filosofia, matemática, retórica, latim, grego e hebraico. Leibniz finalizou o curso com a tese *De Princípio Individui* (Os princípios do indivíduo, 1663). Por influência do professor de matemática Erhard Weigel (1625-1699), reconheceu a importância da prova matemática tanto para a lógica quanto para a filosofia e desenvolveu seu mestrado em filosofia unindo, a essa área, direito e matemática. Para Weigel, o número era o conceito fundamental do universo e essa ideia foi base para os escritos de Leibniz (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998).

Segundo O'Connor e Robertson (1998), Leibniz também sofreu influência dos trabalhos de Pascal, Descartes, Honoré Fabri (1608-1688), James Gregory (1638-1675), Gregory of Saint-Vincent (1584-1667) e René de Sluze (1622-1685), sob recomendação de Christiaan Huygens.

Depois de se formar em direito aos 20 anos de idade, em 1666, Leibniz publicou a obra *Dissertatio de Arte Combinatoria* (Dissertação sobre Arte da Combinatória, Figura 15) com o objetivo de compilar o raciocínio e a descoberta de combinações de elementos básicos, como números, letras, sons e cores (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998). É a partir desse documento que se analisa a ligação de Leibniz com a análise combinatória.

Segundo uma versão de sua biografia publicada por O'Connor e Robertson (1998), como Leibniz não conseguiu realizar o doutorado em filosofia na Lísia, ele acabou concluindo o doutorado em direito com *De Casibus Perplexis* (Os Casos Complicados) em 1667 na Universidade de Altdorf, na Alemanha. Nos anos seguintes, desenvolveu projetos nas áreas científica, literária e política e publicou monografias de cunho religioso, mantendo sua carreira em direito. Também trabalhou como secretário, assistente, bibliotecário, advogado e consultor de um barão alemão.

Figura 15: Folha de rosto da obra *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666), de Gottfried von Leibniz.



Fonte: LEIBNIZ, 1666.

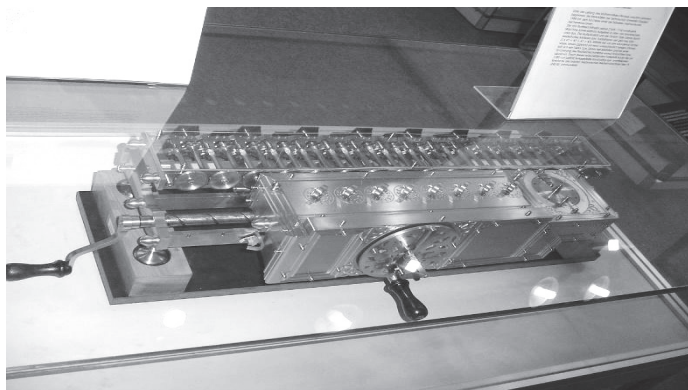
Leibniz analisou os resultados sobre matemática e física de Christopher Wren (1632-1723) e Christiaan Huygens. Em Paris, manteve contato com matemáticos e filósofos, como Antoine Arnauld (1612-1694) e Nicolas Malebranche (1638-1715). Por volta de 1672, ainda em Paris, seus estudos científicos sobre a construção de uma máquina de calcular (Figura 16) tinham como pretexto interesses políticos, religiosos e de paz relacionados à Guerra Franco-Holandesa (1672-1678) (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998).

Em 1673, Leibniz construiu sua versão sobre o cálculo, propondo uma notação. Por meio de muito estudo, tentativa e falha, Leibniz forneceu, em um manuscrito⁸, a regra do produto para diferenciação, a qual deu-lhe destaque nesse campo matemático (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998).

Para Katz (2009), os estudos de Leibniz sobre cálculo o colocaram como o segundo “inventor” do cálculo. Ele também desenvolveu e aprimorou o sistema binário da aritmética em 1679 e, mais tarde, estudou sobre determinantes para resolver sistemas lineares (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998). Segundo Katz (2009), em 1714, Leibniz escreveu um trabalho chamado *Historia et origo calculi differentialis* (A história original do cálculo diferencial).

8 Um artigo intitulado *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur*, publicado em 1684 na revista *Acta Eruditorium*.

Figura 16: Réplica da máquina de calcular de Leibniz.



Fonte: Wikimedia, 2006.

Para Franzon (2016), o tratado *Dissertatio de Arte Combinatoria* envolve a arte das combinações ou as ciências das combinações e expõe as primeiras ideias de Leibniz sobre a “linguagem universal”. Com esse termo, Leibniz defendia a estruturação de uma linguagem que fosse compreensível a diferentes povos, facilitando o desenvolvimento das relações lógicas e combinatórias no cálculo. O objetivo era determinar caracteres específicos para expressar as relações, criando o que seria conhecido com uma enciclopédia universal (O’CONNOR; ROBERTSON, 1998).

A análise da obra de Leibniz (*Arte Combinatoria*) foi feita a partir da versão original, escrita em latim em 1666, mas digitalizada e disponibilizada na internet (LEIBNIZ, 1666), com apoio na tradução para o inglês de um trecho da obra feita por Leroy E. Loemker em 1989 (LEIBNIZ, 1989) e também na tradução integral para o espanhol feita por Manuel Correia M. em 1992 (LEIBNIZ, 1992), realizando uma tradução própria para o português.

4.3.1 DISSERTATIO DE ARTE COMBINATORIA: POSSIBILIDADE DE USO EM SALA DE AULA

Analisando a sinopse da obra original e os documentos traduzidos, observa-se que Leibniz propunha trabalhar problemas de combinação aplicados à classificação de casos da lógica, do direito, da teologia e de outros campos do pensamento. Ao longo do documento, doze problemas no âmbito da análise combinatória são discutidos (LEIBNIZ, 1989).

A primeira demonstração da obra traz evidências do contexto vivido por Leibniz na época de sua produção. Com crenças fortemente luteranas (cristãos-protestantes) e levemente católicas, ele traz a *Demonstratio existentiae Dei* (Demonstração da existência de Deus) por meio de proposições lógicas. Citando brevemente esse trabalho de Leibniz, ele utiliza três definições lógicas para a demonstração: um postulado, quatro axiomas e uma observação; a partir disso, traz a prova da existência de Deus em 21 passos (LEIBNIZ, 1666).

Em sua obra, Leibniz apresenta *Analysis* (análises) como uma ciência das razões e das proporções ou de quantidade desconhecida, e *Arithmetica* (aritmética) como uma ciência de quantidades ou de números conhecidos que ampara a quantificação das combinações. Aritmética e análise estão juntas para a quantificação de seres (LEIBNIZ, 1666). Segundo Franzon (2016), Leibniz define os princípios para a origem da análise combinatória pelo que ele mesmo chama de “Lógica Inventiva” e mostra as aplicações dessa lógica sobre a ideia de raciocínio dedutivo a partir de premissas (silogismo).

Nessa obra, Leibniz propunha o estudo da ordenação, da colocação e da escolha de objetos para definir a combinatória (VASQUEZ; NOGUTI, 2004). Por isso, antes de apresentar os problemas, Leibniz levanta discussões importantes

para conceituar unidade, todo e quantidade. Ele ressalta que “unir” trata-se de relacionar partes para formar um conjunto, tomando-as simultaneamente (sobre uma única situação). A representação dessa união pode ser feita por meio de um único número, principalmente quando é inviável apresentar todas essas partes uma a uma. Com isso, a “unidade” está associada a um único ser, já que o “todo”, constituído por unidades, pode ser representado por um único número. A partir disso, a “quantidade” também pode ser representada por um número, resultado da interpretação do que se deseja quantificar. Portanto, a “quantidade” pode ser uma relação ou uma proporção com outra quantidade, principalmente quando não é possível quantificar essas partes separadamente, apenas como um “todo”.

Na obra, Leibniz usa como exemplo para o “todo” as letras ABC – assim como vimos na obra de Frenicle de Bessy –, com isso, as partes poderiam ser a junção dessas letras duas a duas, como AB, BC e AC. Dentro desse problema, pode-se considerar também a situação de mudar a posição das letras, como em BA. Contudo, é necessário definir se AB será igual ou diferente de BA (LEIBNIZ, 1666). Essa parte da obra de Leibniz foi usada no exercício 1.2 (Figura 21).

Nesse sentido, Leibniz traz definições para o que ele chama de *Variation*, *Variability*, *Situs* e *Complexiones*. Notamos que as variações (*Variation*) abrangem o processo de associação de elementos, sejam por permutação, sejam por arranjo ou por combinação simples. Leibniz escreve que existem dois tipos de variações: *Complexiones* e *Situs*. Enquanto *Complexiones* voltam-se para a aritmética pura (quantos são possíveis na configuração apresentada, isto é, como as partes do “todo”), *Situs* trata da aritmética de figuras (quantas são possíveis

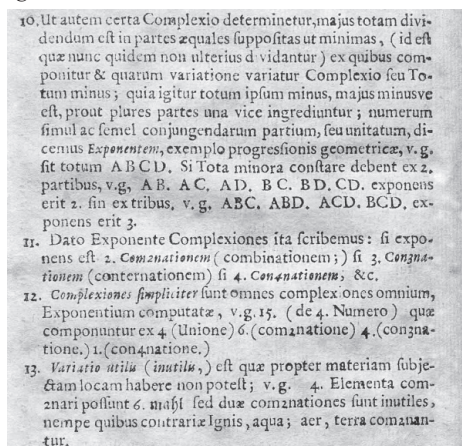
dependendo da localização dos elementos que compõem o “todo”, ou seja, como as partes das partes do “todo”).

A variabilidade de uma associação (*Complex*) dará origem às *Complexiones*. Para Franzon (2016), esse termo refere-se ao que conhecemos atualmente por “combinação simples”. Portanto, *Situs* refere-se possivelmente à atual permutação ou arranjo. Para o primeiro caso (*Complexiones*), Leibniz explica que é possível combinar 4 “coisas” de 15 maneiras diferentes, considerando agrupamentos de diferentes tamanhos – como também foi apresentado por Frenicle de Bessy. Para o segundo caso (*Situs*), 4 “coisas”, tomadas de 4 em 4, podem ser combinadas de 24 maneiras diferentes (LEIBNIZ, 1666). Na página 4 de sua obra original, Leibniz mostra diferentes representações da combinação. Veja na Figura 17.

Observe nos itens 11 e 12 da Figura 17 que Leibniz coloca números na composição das palavras para mostrar a quantidade de elementos dos agrupamentos que serão formados. Em *com2nationem*, os elementos devem se combinar dois a dois; em *con3nationem*, três a três; e *con4nationem*, quatro a quatro. Além disso, ele comenta que esses elementos serão representados por um expoente (*Exponentem*). No item 13 (Figura 17), ele faz uma ressalva de que combinações inúteis podem ocorrer devido à natureza dos elementos que não permitem uma combinação, como fogo e água. Isso mostra que Leibniz pensava em combinações reais, mas usava letras para apresentar e exemplificar seus estudos, possivelmente para facilitar a compreensão do leitor.

A abordagem da diferença entre combinação e arranjo, sem mencionar esses termos, foi trabalhada no exercício 6.1 (Figura 37).

Figura 17: Fragmento 1 de *Dissertatio Arte Combinatoria*, de Leibniz, pg. 4.



Fonte: LEIBNIZ, 1666.

Analisando ainda mais a dissertação de Leibniz, a proposta do primeiro problema apresentado por ele é descobrir o número de variações (combinações) possíveis, conhecendo-se o número de elementos e a quantidade de elementos nos agrupamentos. Para apresentar isso, Leibniz mostra o que ele chama de “tabela” (Figura 18) com o resultado das combinações de elementos de 1 a 12 (horizontal) em agrupamentos de 1 a 12 (vertical) que, como dito, são denominados *Exponents* (expoentes), como vemos na Figura 17. Repare que, em algumas representações atuais de combinação, o tamanho dos agrupamentos aparece como um índice, por exemplo, uma combinação de 4 elementos 2 a 2 poderia ser representada por C_2^4 ou $C_{4,2}$.

Para completar a tabela apresentada a seguir, Leibniz traz a seguinte mensagem em sua obra: “adicione a quantidade de variações do número precedente ao número de elementos dado, agrupados sob o número precedente ao expoente dado, com a

quantidade de variações do número precedente ao número de elementos agrupados sob o expoente dado”.

Figura 18: Fragmento 2 de *Dissertatio Arte Combinatoria*, de Leibniz, pg. 7.

TABLE N													
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7n	8u	9m	10b	11e	12r
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495
5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792
6	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	462	924
7	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45	165	495
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	55	220
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11	66
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
*	0	1.	3.	7.	15.	31.	63.	127.	255.	511.	1023.	2047.	4095.
†	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.

* The complexions taken simply (or the sum of the complexions of all given exponents), added to 1, equal the total of a geometric progression with base 2¹.⁹⁰ ...

Fonte: LEIBNIZ, 1989.

Para entender melhor a escrita, vamos ver alguns exemplos numéricos:

- a) Se o número de elementos for 4 e o expoente for 3, basta somar as variações do agrupamento de 3 elementos 2 a 2 e de 3 elementos 3 a 3 para achar a quantidade de variações (combinações) desses 4 elementos agrupados 3 a 3. Lembre-se de que, como são combinações, a ordem não importa.
 - Tomando 3 elementos ABC 2 a 2, teremos AB, AC e BC, ou seja, 3 variações.
 - Tomando 3 elementos ABC 3 a 3, teremos ABC, ou seja, 1 variação.
 - Logo, 4 elementos ABCD, agrupados 3 a 3, terão 3 + 1 = 4 variações.

De fato, as combinações de ABCD 3 a 3 serão ABC, ABD, ACD e BDC.

- b) Se o número de elementos for 5 e o expoente for 2, basta somar as variações do agrupamento de 4 elementos 1 a 1 e de 4 elementos 2 a 2 para achar a quantidade de variações (combinações) desses 5 elementos agrupados 2 a 2.
- Tomando 4 elementos ABCD 1 a 1, teremos A, B, C e D, ou seja, 4 variações.
 - Tomando 4 elementos ABCD 2 a 2, teremos AB, AC, AD, BC, BD e CD, ou seja, 6 variações.
 - Logo, 5 elementos ABCDE, agrupados 2 a 2, terão $4 + 6 = 10$ variações.

De fato, as combinações de ABCDE 2 a 2 serão AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE e DE.

Com isso, à medida em que se completa a tabela, é possível determinar o número de variações sem precisar escrevê-las, bastando somar o resultado dos agrupamentos calculados anteriormente – o que também foi apresentado por Frenicle de Bessy.

Essa tabela foi explorada na proposta do exercício 2.4 (Figura 30). A ideia é que os alunos percebam essa soma apresentada por Leibniz, a partir de alguns valores deixados, para conseguirem determinar as combinações sem escrever todas as possibilidades ou sem precisar de usar fórmulas.

A título de conhecimento, o problema II apresentado na obra de Leibniz propõe uma forma prática de determinar o número de variações possíveis para um número dado. Ele parte da mesma tabela (Figura 18) apresentada no problema I, usando os números apresentados na última fileira horizontal

de símbolo t . Ele mostra que esses números são resultado de uma progressão geométrica de base 2: $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$ até 2^{12} .

Segundo Leibniz (1666), tomando um desses números da progressão, a quantidade de tipos de agrupamentos das combinações pode ser encontrada subtraindo 1 do número do expoente da base 2. Por exemplo, olhando na tabela da Figura 18, o número 128 que aparece na fileira t equivale a 2^7 , o que significa que ele terá $7 - 1 = 6$ possíveis quantidades de agrupamentos para combinações, desconsiderando a unidade, que são os números que aparecem na coluna vertical alinhada com o número 128 na tabela (Figura 18): 7, 21, 35, 35, 21 e 7. Leibniz acrescenta que, como 6 é par, existem os pares de combinações iguais. Observando a “tabela”, nota-se que, para 2^6 , serão 5 possibilidades e as combinações serão 6, 15, 20, 15 e 6, em que 20 não possui um correspondente, já que 5 é um número ímpar.

No caso da igualdade dos resultados, Leibniz afirma que há certa complexidade em se compreender a demonstração de tal fato, deixando-a em aberto na época. Atualmente, sabe-se que ele estava mostrando que, para n elementos tomados p a p :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Sendo n o número de elementos e p os elementos do agrupamento. Pela tabela (Figura 18), é possível observar que os números 0 (zeros) resultam da impossibilidade de se realizar agrupamentos com números maiores que o número de elementos dados, ou seja, para casos em que $p > n$.

No problema IV de Leibniz (Dado o número de [elementos], encontre as variações da ordem), em que variações

de ordem são permutações, ele apresenta a relação observada entre as permutações dos números naturais de 1 a 24 em outra “tabela” (Figura 19), assim como foi apresentado por Frenicle de Bessy (Figura 5). Na coluna da direita estão os números de elementos a serem permutados. É necessário apresentar essa figura aos alunos para a resolução do desafio do exercício 3.1.

Figura 19: Fragmento 3 de *Dissertatio Arte Combinatoria*, de Leibniz, pg. 57.

1	1	1
2	2	2
6	3	3
24	4	4
120	5	5
720	6	6
5040	7	7
40320	8	8
362880	9	9
3628800	10	10
39916800	11	11
479001600	12	12
6227020800	13	13
87178291200	14	14
1307874368000	15	15
20922789888000	16	16
355687428096000	17	17
6402373705728000	18	18
121645100408832000	19	19
24329020081766400000	20	20
510909421717094400000	21	21
1124000727776076800000	22	22
258520167388849766400000	23	23
6204484017332394393600000	24	24

Fonte: LEIBNIZ, 1666.

No problema V, Leibniz mostra que o resultado de certa permutação é igual ao produto do número de elementos com o resultado da permutação do número anterior. Por exemplo, a permutação de 4 é 24, que é o mesmo que o produto 4.6, em

que 6 é resultado da permutação de 3 elementos. Observa-se que, nesse caso, Leibniz trata da fatoração ($n!$).

O problema III e os demais problemas após o V (até XII) focam na discussão sobre a abordagem do conceito em contextos específicos, como direito, história, física, divisão do governo, entre outros, que não serão tratados neste livro pela incompatibilidade com o conteúdo e com o ano com que se deseja trabalhar as atividades.



ATIVIDADES PROPOSTAS PARA SALA DE AULA

A partir dos fragmentos dos documentos apresentados nas seções do capítulo anterior, seguem abaixo as atividades elaboradas como proposta para o uso de história da matemática no processo de ensino-aprendizagem dos problemas de contagem. As atividades estão adaptadas para serem aplicadas aos alunos em sala de aula, em especial aqueles matriculados no 8º ano do ensino fundamental. Por isso, é importante saber que os alunos não sabem diferenciar os termos “combinar”, “permutar” e “arranjar”.

As atividades foram nomeadas conforme o conteúdo da análise combinatória que os seus exercícios abordam. Com isso, uma atividade pode ter um, dois ou três exercícios.

Para a proposição das atividades, seguimos as orientações de Mendes (2008) e tentamos “conduzir diretamente a investigação da matemática presente nas informações históricas (matemática cotidiana, acadêmica e escolar)” (MENDES, 2008, p. 42), além de seguirmos os seguintes passos na apresentação de cada atividade e de cada exercício:

1. O nome de cada atividade;
2. O objetivo do exercício;
3. A obra utilizada no exercício;
4. O autor da obra utilizada no exercício;
5. O conteúdo histórico do exercício;
6. A operacionalização dos exercícios;

7. Os desafios propostos nos exercícios;
8. Comentário sobre o exercício, quando necessário.

Nenhum material especial é necessário para a realização das atividades, apenas as folhas impressas com as atividades para a escrita do aluno. Contudo, é importante saber que as atividades e os exercícios devem ser resolvidos na ordem em que foram apresentados neste livro, pois eles seguem uma sequência de texto, de raciocínio e de dificuldade.

Nas atividades, propomos utilizar a história da matemática para mostrar os meios adotados no passado para a resolução de problemas de contagem, em um momento em que o conteúdo estava sendo construído e não possuía formalizações.

Nas obras e nas atividades, é possível observar que a escrita apresentada pelos cientistas está relacionada ao modo como cada um raciocinava sobre determinado problema. Portanto, a proposta é que os alunos resolvam as atividades pensando a seu modo, sem o uso de fórmulas ou o reconhecimento de termos, apenas por meio de raciocínio próprio e de cálculos aritméticos e sem o receio de errar, como se eles estivessem construindo o conhecimento por meio de tentativas. Se as atividades forem aplicadas para alunos do ensino médio ou de curso superior, os resultados podem, eventualmente, ser comparados com as resoluções realizadas por meio das fórmulas.

Sugerimos ao professor que, antes da aplicação das atividades em sala, seja feita uma aula introdutória. Nessa aula, explique aos alunos que as atividades devem ser feitas sem utilizar fórmulas. Eles devem ler e interpretar o que se pede, e após a interpretação, usar métodos matemáticos válidos para resolver os desafios.

Também sugerimos que, nessa aula introdutória, forme-se uma roda de conversa para comentar sobre:

1. O conceito de história da matemática, que se encontra no capítulo 2, seção 2.2 e 2.3.
2. A história dos problemas de contagem desenvolvidos pelos povos de diferentes identidades culturais, apresentada no capítulo 3. A intenção é que os alunos conheçam e valorizem a ciência produzida por povos poucos estudados, como comentado na seção 2.2.1 deste livro.
3. Um pouco das biografias dos três cientistas estudados, Frenicle de Bessy, Blaise Pascal e Leibniz, escritas nas seções 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente. Seria interessante mostrar aos alunos uma imagem de cada um deles.
4. O cerne das três obras usadas nas atividades (*Divers ouvrages de mathématique et de physique: Abregé des Combinaisons; Traite du Triangle Arithmetique; Dissertatio de Arte Combinatoria*), com apresentação de suas folhas de rosto, que podem ser encontradas neste livro nas figuras 4, 7, e 15.

Para tanto, o professor pode utilizar o conteúdo trabalhado neste livro nos capítulos anteriores. Pode ser necessário o preparo de material complementar para a apresentação das imagens e dos textos.

Nessa aula introdutória, seria interessante trabalhar de modo interdisciplinar com os professores de história e de geografia, por exemplo, para explicar o contexto social do século de XVII na Europa e a localização dos países em que os estudiosos citados viveram. O professor pode aproveitar para questionar aos alunos a respeito da locomoção na época discutida. Por exemplo: Leibniz vivia na Alemanha, mas ficou um tempo

na França, portanto, “como ele chegou até lá?”, “qual tipo de transporte ele utilizou?” e “quanto tempo levou?”. Trabalhando de modo interdisciplinar, podemos evitar comentários como “mas estamos em uma aula de matemática, por que preciso ler?” e “aula de matemática é somente para fazer contas, por que tenho que entender o contexto social?”. Além disso, mesmo utilizando uma metodologia diferente, que fornece resposta a outros questionamentos, é necessário estar preparado para a tendência dos alunos em evitar o “novo”, mostrando a importância do estudo da história da matemática, instigando sua curiosidade.

Após a aplicação das atividades, é importante ter um *feedback* dos alunos sobre o que foi realizado, podendo-se, inclusive, questioná-los sobre as semelhanças e as diferenças entre os métodos de resolução dos problemas de contagem do passado e os atuais.

ATIVIDADE 1: COMBINAÇÃO MALUCA

• EXERCÍCIO 1.1

Objetivo: Apresentar a combinação simples de quatro letras em diferentes agrupamentos.

Obra utilizada: *Traite du Triangle Arithmetique* (1665)

Autor da obra: Blaise Pascal

Um pouco de história:

Para discutir sobre combinações, o matemático francês Blaise Pascal (1623-1662), em 1665, publicou sua obra *Traite du Triangle Arithmetique* (Tratado do triângulo Aritmético), usando a combinação de quatro letras: A, B, C e D. Ele propõe

que, se essas letras forem combinadas duas a duas, sem repetir nenhuma letra, será possível fazer seis combinações diferentes, considerando que a combinação AB é igual à combinação BA. A partir disso, ele mostra o seguinte trecho em sua obra:

Figura 20: Fragmento 3 de *Traite du Triangle Arithmetique*, de Blaise Pascal, pg. 4.

Je parleray donc en ces termes.

1	dans	4	se combine	4	fois.
2	dans	4	se combine	6	fois.
3	dans	4	se combine	4	fois.
4	dans	4	se combine	1	fois.

Où ainſi.

La multitude des combinaifons de 1 dans 4 est	4.
La multitude des combinaifons de 2 dans 4 est	6.
La multitude des combinaifons de 3 dans 4 est	4.
La multitude des combinaifons de 4 dans 4 est	1.

Fonte: PASCAL, 1665.

No fragmento: “Usarei então os seguintes termos.

- 1 em 4 se combina 4 vezes.
- 2 em 4 se combina 6 vezes.
- 3 em 4 se combina 4 vezes.
- 4 em 4 se combina 1 vez.”.

Desafio proposto: A partir desse fragmento, faça todas as combinações com as letras A, B, C e D para demonstrar as quatro conclusões de Pascal.

Comentário: A construção dessas possibilidades é fundamental para que os alunos usem os resultados nos próximos exercícios.

• EXERCÍCIO 12

Objetivo: Trabalhar combinação simples, agrupando três letras distintas.

Obra utilizada: *Dissertatio Arte Combinatoria* (1666)

Autor da obra: Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Um pouco de história:

O cientista alemão Leibniz (1646-1716) publicou, em 1666, em latim, um trabalho sobre combinações. A partir de seu trabalho, foi retirado o seguinte fragmento:

Figura 21: Fragmento 4 de *Dissertatio Arte Combinatoria*, de Leibniz, pg. 2.

¶. Cæterum Totum ipsum (& ita Numerus vel Totalitas) discerpi in partes tanquam minora tota potest, id fundamentum est *Complexionum*, dummodo intelligas dari in ipsis diversis minoribus totis partes communes, v.g. Totum sit A.B.C. erunt minora Tota, partes illius, A.B. B.C. A.C: Et ipsa minimarum

Fonte: LEIBNIZ, 1666.

No fragmento: “O todo em si (e, portanto, número ou totalidade) pode ser dividido em partes, inteiros menores, desde que você entenda que existem partes comuns nos diferentes conjuntos menores. Por exemplo, deixe o todo ser ABC; em seguida, AB, BC, e AC serão suas partes menores [duas a duas]”. Observe que, nesse caso, $AB = BA$, $BC = CB$ e $AC = CA$, ou seja, a posição das letras não importa.

Desafio proposto: A partir desse fragmento, responda:

- Se o todo for ABC, quantas serão as partes menores tomadas uma a uma? Quantas serão as partes tomadas duas a duas? Quantas serão as partes tomadas três a três? Com isso, em todas as condições, quantas partes serão no total?

- b) Nesse mesmo documento, Leibniz explica que existem 15 diferentes formas de se combinar 4 diferentes “coisas”. Mostre as 15 diferentes formas de combinar as letras XYZW em todas condições de associação, em que a mudança de posição das letras não importa.

Comentário: Nesse processo de resolução das questões, os alunos estão trabalhando com a combinação simples de outras letras, assim como no exercício anterior, percebendo que existem agrupamentos de diferentes tamanhos e que a ordem desses agrupamentos não importa, pois XYZM é igual a YXZM ou ZYXM, por exemplo.

ATIVIDADE 2: O TRIÂNGULO ROUBADO

• EXERCÍCIO 2.1

Objetivo: Construir o triângulo aritmético.

Obra utilizada: *Traite du Triangle Arithmetique* (1665)

Autor da obra: Blaise Pascal

Um pouco de história:

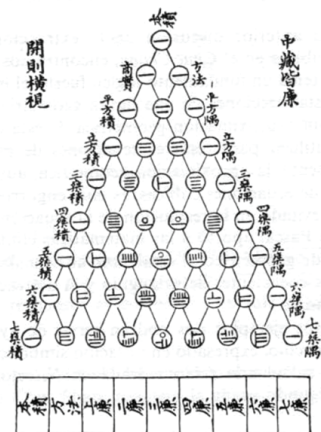
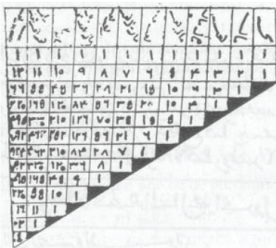
O cientista francês Blaise Pascal (1623-1662) publicou, em 1666, um trabalho sobre o Triângulo Aritmético. Entretanto, o triângulo aritmético foi estudado primeiro por chineses, islamicos, italianos, alemães e árabes e somente depois por Pascal – o francês que ficou com a fama.

Observe as figuras abaixo e dê sua opinião: o triângulo é ou não é de Pascal? Para saber mais, consulte o link: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html>.

Figura 22: Trabalhos sobre triângulo aritmético atribuídos a (A) Abu Al-Karaji (953-1029?) e (B) Yang Hui (1238?-1298?).

B) 圖方察七法古

A)



Fonte: VILLALBA; MARTÍNES, 2005, p. 61.

Abaixo, temos uma reprodução desse triângulo segundo o trabalho de Pascal, com algumas células (quadrados) em branco.

Figura 23: Triângulo aritmético de Blaise Pascal incompleto.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1									
3	1		C							
4	1	E	F							
5	1									
6	1									
7	1									
8	1									
9	1									
10	1									

Fonte: Adaptado de PASCAL, 1665.

Desafio proposto: Complete as células do Triângulo Aritmético anterior com base no fragmento de texto apresentado a seguir, que explica sobre sua construção:

Figura 24: Fragmento 4 de *Traite du Triangle Arithmetique*, de Blaise Pascal, pg. 2.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouvent par cette methode.
Le nombre de la premiere cellule qui est à l'angle droit est arbitraire, mais celuy-là estant placé tous les autres sont forcez, & pour cette raison il s'appelle le Generateur du triangle. Et chacun des autres est spécifié par cette seule regle.
Le nombre de chaque cellule, est égal à celuy de la cellule qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celuy de la cellule qui la precede dans son rang parallele. Ainsi la cellule F, c'est à dire le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E; & ainsi des autres.

Fonte: PASCAL, 1665.

No fragmento: “Ora, os números que são colocados em cada célula são achados pelo seguinte método:

[...]

O número de cada célula é igual ao número das células que a procede na sua fileira perpendicular (vertical) somado com a da célula que a precede na sua fileira paralela (horizontal). Assim, a célula F, ou melhor, o número da célula F, é igual a célula C mais a célula E, e assim por diante.”.

Comentário: Alguns alunos já podem estar familiarizados com o triângulo. A intenção de pedir o preenchimento do triângulo é aproximar o aluno do triângulo apresentado especialmente por Pascal, que será usado nos exercícios seguintes para tratar das combinações.

• EXERCÍCIO 2.2

Objetivo: Reconhecer a combinação simples no Triângulo Aritmético.

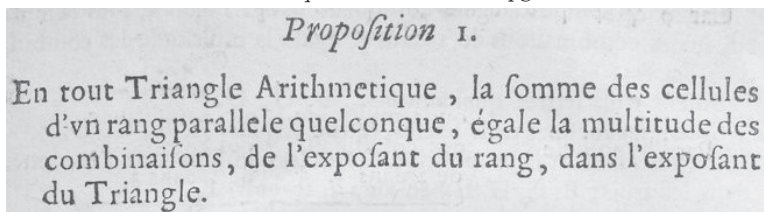
Obra utilizada: *Traite du Triangle Arithmetique* (1665)

Autor da obra: Blaise Pascal

Um pouco de história:

Blaise Pascal, ao estudar combinações usando triângulos aritméticos, apresentou a seguinte proposição:

Figura 25: Fragmento 5 de *Traite du Triangle Arithmetique*, de Blaise Pascal, pg. 7.

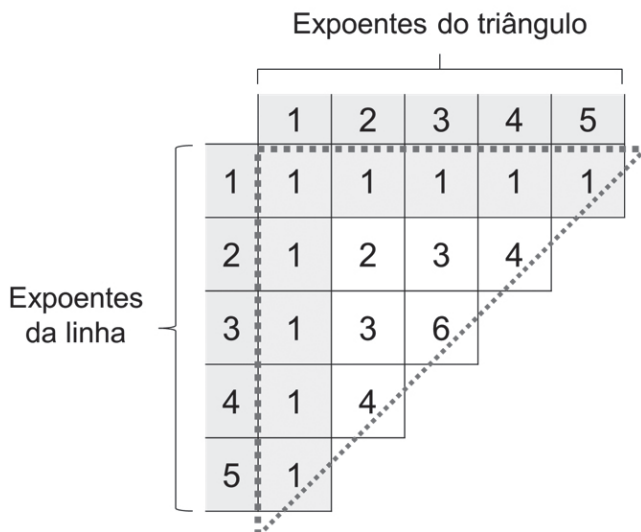


Fonte: PASCAL, 1665.

No fragmento: “Em todo triângulo aritmético, a soma das células de uma [linha] qualquer é igual à quantidade de combinações do expoente da [linha] no expoente do Triângulo.”.

Desafio proposto: Usando uma das combinações mostradas no **exercício 1.1** e na figura abaixo, exemplifique a proposição de Pascal.

Figura 26: Triângulo aritmético de base 4.



Fonte: Gerado pelas autoras, 2020.

• EXERCÍCIO 2.3

Objetivo: Reconhecer a combinação simples no Triângulo Aritmético.

Obra utilizada: *Traite du Triangle Arithmetique* (1665)

Autor da obra: Blaise Pascal

Um pouco de história: Outra proposição também foi apresentada por Blaise Pascal:

Figura 27: Fragmento 6 de *Traite du Triangle Arithmetique*, de Blaise Pascal, pg. 8.

Proposition 2.

Le nombre de quelque cellule que ce soit, égale la multitude des combinaisons d'un nombre moindre de l'unité que l'exposant de son rang parallele, dans vn nombre moindre de l'unité que l'exposant de sa base.

Fonte: PASCAL, 1665.

No fragmento: “O número de qualquer célula é igual à quantidade de combinações do expoente da sua [linha], menos uma unidade (1), no expoente do Triângulo, menos uma unidade (1).”.

Desafio proposto: Usando uma das combinações mostradas na **Atividade 1** e na figura abaixo, exemplifique a proposição de Pascal.

Figura 28: Triângulo aritmético de base 5.

Expoentes do triângulo

		1	2	3	4
1	1	1	1	1	
2	1	2	3		
3	1	3			
4	1				

Expoentes da linha

Fonte: Gerado pelas autoras, 2020.

• EXERCÍCIO 2.4

Objetivo: Reconhecer a relação entre combinações de diferentes quantidades de elementos sob diferentes agrupamentos.

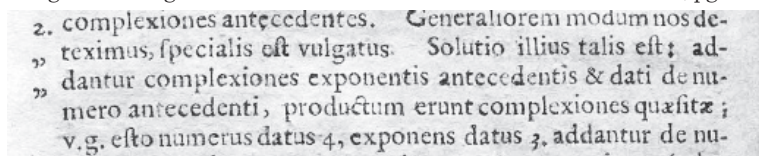
Obra utilizada: *Dissertatio Arte Combinatoria* (1666)

Autor da obra: Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Um pouco de história:

Estudando sobre combinações, o cientista alemão Leibniz (1646-1716), em sua publicação de 1666, observou uma relação entre as combinações de diferentes quantidades de elementos. Observe este fragmento:

Figura 29: Fragmento 5 de *Dissertatio Arte Combinatoria*, de Leibniz, pg. 6.



Fonte: LEIBNIZ, 1666.

No fragmento: “Adicione a quantidade de variações do número precedente ao número de elementos dado, agrupados sob o número precedente ao expoente dado, com a quantidade de variações do número precedente ao número de elementos agrupados sob o expoente dado.”.

Para representar sua explicação, Leibniz apresentou uma tabela (Figura 30) com o resultado das combinações de elementos de 1 a 12 em agrupamentos de 1 a 12, que são denominados “exponentes”.

Desafio proposto: Analise a frase apresentada no fragmento e complete a tabela de Leibniz com os 9 valores que estão faltando. Em seguida, responda às questões propostas.

Figura 30: Fragmento 2 adaptado de *Dissertatio Arte Combinatoria*, de Leibniz, pg. 7.

TABLE N													
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7n	8u	9m	10b	11e	12r
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45		66
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
4	0	0	0	0	1	5	15	35		126	210		495
5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792
6	0	0	0	0	0	0	1	7	28		210		
7	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9		165	495
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		66
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
*	0	1.	3.	7.	15.	31.	63.	127.	255.	511.	1023.	2047.	4095.
†	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.

* The complexions taken simply (or the sum of the complexions of all given exponents), added to 1, equal the total of a geometric progression with base $2^{\dagger}$,²⁰ ...

Fonte: LEIBNIZ, 1989 (Adaptado).

- Qual foi o critério utilizado para preencher a tabela de Leibniz?
- Por que existem vários 0 (zeros) na tabela?
- Análise os números na linha do símbolo *. O que eles representam?
- Análise os números na linha do símbolo †. O que eles representam?

ATIVIDADE 3: PERMUTA-A-AÇÃO

• EXERCÍCIO 3.1

Objetivo: Reconhecer o fatorial e as características da permutação simples.

Obra utilizada: *Dissertatio Arte Combinatoria* (1666)

Autor da obra: Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Um pouco de história:

Leibniz apresentou uma tabela (Figura 19) em que observa a relação entre as permutações de diferentes quantidades de elementos. A partir dessa tabela, o filósofo concluiu 7 teoremas.

Desafio proposto: Analise a tabela e, a partir das palavras e dos números do quadro a seguir, complete as frases com as conclusões que podem ser obtidas para enunciar adaptações dos teoremas de Leibniz.

36	2	36	3	6	0 (zero)
840	24	600	40	18	pares
dividindo	multiplicada	permutação	posteriores	diferença	dividido
some		igual		anterior	

- Todos os números das permutações são _____.
- Todos os resultados das permutações com elementos iguais ou superiores a 5 terminam em _____.
- Todas as somas dos algarismos das permutações serão sempre múltiplos de _____ quando o número de elementos for igual ou superior a 4.
- Qualquer permutação _____ divide todas as permutações _____.

- e) Os números das permutações levam à conversão da sequência numérica em harmônica (música). As permutações do número 5 são 120; _____ esse valor pelos números 1, 2, 3, 4 e 5, obtêm-se 120, 60, _____, 30 e _____, assim, temos a sequência harmônica.
- f) Ao se duplicar qualquer permutação e subtrair dela o produto do número do elemento anterior pela _____ desse elemento, o resultado será _____ à _____ das duas permutações envolvidas. Exemplo: tomando o número de permutações de 6 elementos, teremos: $720 \cdot 6 - 5 \cdot 120 = 1\ 440 - 600 = 840$; $720 + 120 = 840$.
- g) Se uma permutação for _____ por si mesma e o produto for _____ pela quantidade de elementos anterior, o resultado será igual à _____ entre a permutação especificada e a seguinte. Exemplo: Tomando 6 permutações (elemento 3), fazemos $6 \cdot 6 = 36$, depois $36 : 2$ (elemento anterior) = 18; $24 - 6 = 18$.

Comentário: Para essa atividade, se o professor achar necessário, pode-se retirar o quadro com todas as palavras e números a serem preenchidos nas frases, lembrando que ele orienta melhor os alunos.

• EXERCÍCIO 3.2

Objetivo: Reconhecer anagramas sem repetição de letras.

Obra utilizada: *Abregé des Combinaisons* (1693)

Autor da obra: Bernard Frenicle de Bessy

Um pouco de história:

No trabalho de 1693 sobre combinações de letras, conhecido por “anagramas”, do cientista francês Bernard Frenicle de Bessy (1604?-1674), existe o seguinte fragmento:

Figura 31: Fragmento 2 de *Abregé des Combinaisons*, de Frenicle de Bessy, pg. 46.

<i>o b i e</i>	Voicy la differente disposition qu'on peut donner à quatre choses,
<i>o b e i</i>	afin de faire voir de quelle façon on les arrangerá pour n'omettre aucune
<i>o i b e</i>	disposition. On se proposera premièrement quelque ordre, comme en
<i>o i e b</i>	ces quatre lettres <i>o, b, i, e</i> . La première soit <i>o</i> , la seconde <i>b</i> , &c. il faut
<i>o e b i</i>	en retenant la première changer l'ordre des dernières. Ainsi, ayant placé
<i>o e i b</i>	& disposé les quatre lettres selon cet ordre, je retiens <i>o</i> , que je laisse tou-
<i>b o i e</i>	jours au premier lieu, & je change les trois autres <i>b, i, e</i> , en toutes les fa-
<i>b o e i</i>	çons possibles qui font 6, & pour ces 6, on observerá encore la même
<i>b i o e</i>	regle; & ainsi parce que je trouve <i>b</i> , le premier des 3, je le retiens, & je
<i>b i e o</i>	change les deux autres <i>i, e</i> , en toutes les sortes, qui font 2, sçavoir <i>i, e</i> ,
<i>b e o i</i>	& <i>e, i</i> .

Fonte: Académie Royale des Sciences, Paris, 1693.

No fragmento, entendemos que: “Aqui está a disposição diferente que pode ser dada a quatro [letras], a fim de mostrar como elas serão organizadas para não omitir nenhuma disposição. Primeiro, proporemos alguma ordem com essas quatro letras: *o, b, i, e*. A primeira letra *o*, segunda *b* e depois *i*, [por último] *e*. Você deve primeiro mover a ordem dos últimos. Assim, tendo colocado as quatro letras nesta ordem, retenho *o*, que sempre deixo em primeiro lugar, e troco *b, i e e*, de todas as maneiras possíveis, que são 6 [...]. [Depois retenho *b* em primeiro e troco as outras três letras, e assim por diante.]”.

Desafio proposto:

Analisando o fragmento, responda:

- Qual a relação da sequência de letras que aparece do lado esquerdo do fragmento com os escritos de Frenicle no fragmento?
- A sequência de combinações das letras escritas no fragmento está completa? Quantas combinações podem ser feitas, fixando-se uma letra inicial e mudando apenas as outras três letras?
- Escreva os anagramas que estão faltando na sequência apresentada ao lado esquerdo do fragmento. Quantos anagramas são no total?

- d) Para determinar a quantidade de anagramas de uma sequência de letras, é sempre necessário seguir o procedimento de Frenicle e descrever todas as possibilidades? Existe um método mais rápido para determinar a quantidade de anagramas da combinação de 4 letras distintas sem precisar escrever todas as possibilidades?

Comentário: Nesse processo de resolução das questões, os alunos estão trabalhando com permutação simples e calculando o fatorial de 4, sem mencionar tais termos.

• EXERCÍCIO 3.3

Objetivo: Aplicar a permutação em situação de reposição de elementos.

Obra utilizada: *Abregé des Combinaisons* em *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (1693)

Autor da obra: Bernard Frenicle de Bessy

Um pouco de história:

Em seu livro, Frenicle quantifica as diferentes possibilidades de se retirar cartas de um baralho qualquer. Observe:

Figura 32: Fragmento 3 de *Abregé des Combinaisons*, de Frenicle de Bessy, pg. 48.

Cette combinaison se trouve, prenant la multitude des choses pour l'exposant d'une puissance, qui a pour racine la diversité des choses combinées: ainsi pour sçavoir en combien de façons on peut avoir & arranger ou jouer les douze cartes prises dans douze jeux de piquet de trente-six cartes chacun, afin qu'on en puisse avoir tant de semblables qu'on voudra, il faut prendre 36 pour racine, & 12 pour l'exposant de la puissance.

Ce fera donc la douzième puissance de 36.

Si on ne prenoit qu'une carte, on n'auroit que 36 variétez.

Si on en prenoit 2, on auroit 1296 variétez, sçavoir le quarré de 36.

Pour trois cartes, on prendroit le cube de 36. Pour quatre, le quarré quarré.

Pour cinq, la cinquième puissance de 36. & ainsi des autres.

Fonte: Académie Royale des Sciences, Paris, 1693.

No fragmento: “Essa combinação [de possibilidades de retirada] é encontrada, elevando a quantidade de cartas ao expoente da quantidade retirada [...]. Assim, para saber quantas combinações distintas alguém pode encontrar ao retirar dozes cartas de um baralho com 36 cartas distintas, [com reposição das cartas], [...] você precisa pegar 36 como base e 12 como expoente.

As combinações serão a _____ potência de 36.

Se pegássemos apenas uma carta, teríamos apenas _____ variações.

Se pegássemos duas delas, teríamos 1 296 variedades, [isto é], o _____ de 36.

Para _____ cartas, pegaríamos o cubo de 36. Para _____ cartas, o quadrado de _____. Para cinco, a quinta _____ de 36 e assim por diante.”.

Desafio proposto:

A partir do fragmento, faça o que se pede:

- Preencha o fragmento com as palavras/números que estão faltando para compreender a mensagem de Frenicle.
- Após completar as frases, o que podemos concluir com esse fragmento?
- Se não houver reposição das cartas, tirando 10 cartas distintas, como podemos representar a quantidade de combinações possíveis?

ATIVIDADE 4: GRAMA DE QUEM?

• EXERCÍCIO 4.1

Objetivo: Reconhecer anagramas com repetição de letras.

Obra utilizada: *Abregé des Combinaisons* em *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (1693)

Autor da obra: Bernard Frenicle de Bessy

Um pouco de história:

Em seu estudo sobre combinações publicado em 1693, o cientista francês Bernard Frenicle de Bessy (1604?-1674), após comentar sobre os anagramas no texto, escreve o seguinte:

Figura 33: Fragmento 4 de *Abregé des Combinaisons*, de Frenicle de Bessy, pg. 47.

De meſme pour cette diſtion, *Ebene*, on prendra 120, qui eſt la combinaifon de 5, à cauſe de ſes cinq lettres: mais parce que parmi ces cinq lettres il y en a trois ſemblables, je diviſe 120 par la combinaifon de 3, ſçavoir par 6, & le quotient 20 fera la multitude des anagrammes de cette diſtion.

On voit icy les 20 variétez de ces cinq lettres, qui pourront donner à connoître comment on pourra faire les variétez des ſituations, quand les choſes ne ſont pas toutes différentes.

Fonte: Académie Royale des Sciences, Paris, 1693.

No fragmento: “Da mesma forma, para a [palavra], *Ebene*, [temos] 120 [combinações], que é a combinação de 5 em 5, por causa de suas cinco letras: mas, por causa de cinco letras, há três similares [e], eu divido 120 pela combinação de 3 [que é] 6, e o quociente 20 será a quantidade de anagramas dessa [palavra].”.

Desafio proposto: A partir do fragmento, responda:

- a) Quantos são os anagramas da palavra *ebene*, proposta por Frenicle? Escreva todas as possibilidades.
- b) Relacione a quantidade de anagramas encontrados com o escrito de Frenicle.

Comentário: Esse exercício é uma continuação dos exercícios relacionados à obra de Frenicle de Bessy. Nesse processo de resolução das questões, os alunos estão trabalhando com permutação com repetição, percebendo que, nesse caso, é preciso dividir o total de possibilidades pelas repetições da letra E.

• EXERCÍCIO 4.2

Objetivo: Reconhecer anagramas com repetição de letras.

Obra utilizada: *Abregé des Combinaisons* em *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (1693)

Autor da obra: Bernard Frenicle de Bessy

Um pouco de história:

Ao discutir sobre combinações em que alguns elementos se repetem, como letras ou números, Frenicle apresenta o seguinte:

Figura 34: Fragmento 5 de *Abregé des Combinaisons*, de Frenicle de Bessy, pg.s 50 e 51.

où il se trouve plusieurs choses semblables, ont fort peu de variété d'ordre, par exemple, si on a quatre choses, elles seront considérées confusément, soit qu'on les prenne toutes différentes, comme a, b, c, d , ou deux semblables, & deux autres différentes, comme a, a, b, c , ou trois semblables, & une autre comme a, a, a, b , ou deux d'une sorte & deux d'une autre, comme a, a, b, b , qu'enfin toutes quatre semblables comme a, a, a, a , ou b, b, b, b .
 a, b, c, d se change en $\square$ façons; a, a, b, c en $\square$; a, a, a, b en $\square$; a, a, b, b en $\square$, & enfin a, a, a, a , ne peut être disposé que d'un $\square$ forte, & n'a aucun ordre: mais voyez comme on en séparera l'ordre.

Fonte: Académie Royale des Sciences, Paris, 1693.

No fragmento: “onde existem várias ‘coisas’ semelhantes, há pouca variação de ordem [na determinação das combinações], por exemplo, se tivermos quatro coisas, elas serão consideradas diferentes ou as consideraremos todas diferentes, como a, b, c, d, ou dois semelhantes, e dois outros diferentes, como a, a, b, c, ou três semelhantes, e outro como, a, a, a, b ou dois de um tipo e dois do outro, como, a, a, b, b ou, finalmente, todos os quatro semelhantes como, a, a, a, a ou b, b, b, b.

A, b, c, d é alterado em _____ maneiras; a, a, b, c em _____; a, a, a, b em _____; a, a, b, b em _____ e, finalmente, a, a, a, a, só podem ser organizados em _____ tipo e não têm ordem, é assim que a ordem será separada.”.

Desafio proposto: No fragmento acima, complete cada caso das combinações propostas por Frenicle com os números que faltam e apresente as combinações feitas para a determinação desses valores.

ATIVIDADE 5: MATEMÁTICA E MÁGICA

• EXERCÍCIO 5.1

Objetivo: Reconhecer o quadrado mágico.

Obra utilizada: *Des quarrez magiques* em *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (1693)

Autor da obra: Bernard Frenicle de Bessy

Um pouco de história:

Em seu estudo sobre combinações de 1693, o cientista francês Bernard Frenicle de Bessy (1604? -1674) publicou sobre os quadrados mágicos, que são divididos por células

preenchidas por números consecutivos. De seu trabalho, foi retirado o seguinte quadrado mágico:

Figura 35: Fragmento 1 de *Des quarrez magiques*, de Frenicle de Bessy, pg. 423.

A				B
	1	15	14	4
	12	6	7	9
	8	10	11	5
C	13	3	2	D

Fonte: Académie Royale des Sciences, Paris, 1693.

Ele diz que “O quadrado A, B, C, D, foi dividido em 16 células, e as células foram preenchidas com números consecutivos de 1 até 16”.

Desafio proposto: Analisando o quadrado, descubra o objetivo de Frenicle com a disposição dos números na forma apresentada.

Comentário: Com esse exercício, propõe-se que o aluno compreenda ou relembre o “segredo” do quadrado mágico, investigando a relação entre os números. Para isso, o aluno irá descobrir a definição dos quadrados mágicos sem que o professor o informe.

• EXERCÍCIO 5.2

Objetivo: Reconhecer as combinações em quadrados mágicos e montar quadrados mágicos.

Obra utilizada: *Des quarrez magiques* em *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (1693)

Autor da obra: Bernard Frenicle de Bessy

Um pouco de história:

Ao longo da construção dos quadrados mágicos, Frenicle apresenta que:

Figura 36: Fragmento 2 de *Des quarrez magiques*, de Frenicle de Bessy, pg. 423.

La somme du plus grand & du moindre nombre de ceux qu'on veut employer dans les cellules du quarré magique estant multipliée par la moitié du costé du quarré, donne la somme de chaque ligne. Ainsi au quarré qui a 16 cellules, si le moindre nombre est 1, & le plus grand 16, & qu'on multiplie leur somme 17 par 2, qui est la moitié de 4, costé de 16, on aura 34 pour le nombre requis.

Que si le quarré magique est impair, on multipliera la moitié de la somme des deux nombres extrêmes par le costé du quarré. Ainsi quand on aura rempli le quarré qui a 25 cellules, si le moindre des nombres est 1, & le plus grand 25, chaque ligne contiendra 65

Fonte: Académie Royale des Sciences, Paris, 1693.

No fragmento: “A soma do maior e o menor número daqueles que queremos empregar nas células do quadrado mágico sendo multiplicado pela metade da ordem do quadrado, fornece a soma de cada linha. Então, no quadrado que tem 16 células, se o menor número for 1 e o maior 16, você multiplicará sua soma 17 por 2, que é metade de 4, teremos 34 [...]. Se o quadrado mágico tem ordem ímpar, multiplique metade da soma dos dois números extremos pela ordem do quadrado. Então, quando nós preenchemos o quadrado que possui 25 células, se o menor número for 1 e o maior 25, cada linha conterà soma 65.”

Desafio proposto:

Com base nas regras escritas por Frenicle, faça o que se pede:

- Se for elaborado um quadrado mágico de ordem 3 preenchido com os números de 1 a 9, qual será a soma das linhas, das colunas e das diagonais desse quadrado?

- b) Escreva todas as possíveis somas que resultam no número encontrado no item anterior. Para as somas, use três números naturais distintos de 1 a 9.
- c) Quantas possibilidades de somas foram encontradas no item anterior?
- d) Construa 3 quadrados mágicos distintos de ordem três usando os números de 1 a 9. Dica: coloque o número 5 no centro do quadrado.
- e) Quantos quadrados mágicos distintos de ordem três podem ser construídos usando os números de 1 a 9?

ATIVIDADE 6: ORDEM DE QUEM?

• EXERCÍCIO 6.1

Objetivo: Reconhecer o arranjo simples.

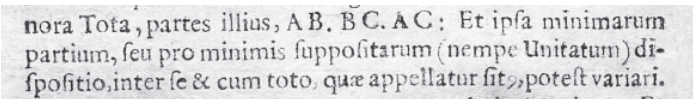
Obra utilizada: *Dissertatio Arte Combinatoria* (1666)

Autor da obra: Gottfried Wilhelm Von Leibniz

Um pouco de história:

Na publicação de 1666 do cientista alemão Leibniz (1646-1716) temos o fragmento:

Figura 37: Fragmento 6 de *Dissertatio Arte Combinatoria*, de Leibniz, pg. 2.



nora Tota, partes illius, A B. B C. A C: Et ipsa minimarum partium, seu pro minimis suppositarum (nempe Unitatum) dispositio, inter se & cum toto, quæ appellatur fit, potest variari.

Fonte: LEIBNIZ, 1666.

No fragmento: “A disposição das partes menores, ou das partes consideradas menores (isto é, as unidades) em relação uma à outra e ao todo também pode variar.”.

Desafio proposto:

- a) Desse fragmento, entendemos que se AB for diferente de BA, mais combinações devem ser contabilizadas em relação a AB igual a BA. Assim, tomando ABC como o todo, quantas partes seriam?
- b) Usando o mesmo critério do item (a), tomando XYZW como o todo, quantas partes seriam?

Comentário: Nesse processo de resolução das questões, os alunos estão trabalhando com arranjo, percebendo que existem agrupamentos de diferentes tamanhos e que a ordem desses agrupamentos importa, pois XYZM é diferente de YXZM ou ZYXM, por exemplo.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos objetivos traçados para a realização do trabalho de conclusão do curso em licenciatura em matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), encontramos publicações que discutem a viabilidade do uso da história da matemática no ensino-aprendizagem em sala de aula, porém, poucos trabalhos disponibilizam materiais para colocar essa metodologia em prática. Essa carência foi observada principalmente em relação ao conteúdo de análise combinatória. Com isso, a proposição do minicurso e a estruturação desse livro foi um desafio que procura preencher parte dessa lacuna.

Foi possível verificar que a história da análise combinatória não é recente e data desde a construção dos sistemas de numeração que usavam combinações em sua composição. Embora não existam muitos registros ou traduções que permitam o uso de alguns materiais em sala de aula, há comprovações de estudos do conteúdo por chineses e árabes no formato já próximo ao dos europeus do século XVII. Isso nos mostra que a história da análise combinatória possui bases simples nos números e na aritmética, o que permite que ela seja estudada e discutida por diversos povos, culturas e contextos. Essa ideia, quando trabalhada em sala de aula, permite ao aluno se aproximar melhor do conteúdo.

Na análise das obras de três diferentes autores do século XVII, publicadas em datas próximas, observou-se uma semelhança entre os estudos e as discussões, sendo algumas

influenciadas pela religião. Todas as obras permitiram a retirada de fragmentos para a elaboração das atividades.

Foi possível observar, nas obras estudadas, que seus autores não apresentaram as combinações, as permutações ou os arranjos dentro de um contexto de soluções de problemas práticos, mas sim no campo abstrato em que a matemática trabalha. Isso se deve, possivelmente, por serem obras do século XVII, quando já existiam as universidades, as sociedades científicas e as revistas para a divulgação dos resultados alcançados. A matemática desenvolvida e praticada estava tomando outros rumos.

Com a elaboração desse trabalho, concordamos com Fossa (2013, p. 8), quando diz que: “a matemática é uma parte – uma parte importante – da cultura maior e só podemos alcançar uma boa compreensão de uma ou outra se compreendermos como as duas se inter-relacionam.” O uso de história permite essa inter-relação para uma melhor compreensão da cultura de estudo e da discussão da análise combinatória, isto é, do contexto (época) em que o conteúdo foi estudado.

A ideia não é propor uma mudança radical na forma de ensino, mas complementar o ensino, usando e valorizando a história da matemática. Além disso, a proposta também não foi abarcar toda a história da análise combinatória para o ensino, mas mostrar que pequenos fragmentos da história podem ser grandes ferramentas de ensino.

O contato dos alunos com os fragmentos pode trazer um novo interesse pelo conteúdo, já que é uma abordagem pouco aplicada em sala de aula. Será um desafio ao raciocínio dos alunos.

O desenvolvimento do presente trabalho, em alguns momentos, ressaltou os desafios das pesquisas na área de

história da matemática, que incluem a dificuldade de encontrar os documentos originais, problemas de compreensão da escrita dos documentos originais e no processo de tradução, que é delicado e demorado. Além disso, foi possível encontrar a tradução para o português de apenas uma das obras estudadas. Isso pode ser reflexo do tempo e do trabalho que as traduções demandam e também da existência de poucas pesquisas brasileiras voltadas para a história da matemática. Essa mesma falta de atenção foi observada no documento curricular atual brasileiro. É preciso reconhecer as contribuições do passado para a produção do presente e inserir, em tais documentos, a história como metodologia de ensino, como sugerido pelo PCN de matemática.

O uso da história da matemática nesse processo de ensino pode ser um caminho novo e promissor aos professores de matemática, facilitando a compreensão dos alunos sobre um conteúdo tão rejeitado na sala de aula, como é o caso da análise combinatória. É necessário ir além do tradicional.

Nesta publicação, as atividades ficam à disposição de professores de matemática para o uso na sala de aula, com possibilidade de adaptações. Espera-se que as atividades sejam aplicáveis ao 8º ano do ensino fundamental e que melhorem o interesse e o desempenho dos alunos quanto ao raciocínio combinatório. Propõe-se, inclusive, que as atividades sejam usadas no ensino médio e no ensino superior de matemática.

Em suma, propomos o aproveitamento dos recursos tecnológicos atuais para (re)visitar o passado e valorizar nossas bases. Por isso, ao professor que deseja aplicar as atividades, é necessária atenção, leitura, persistência, preparo e paciência com desafios que essa nova metodologia propõe.



REFERÊNCIAS

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES. **Divers ouvrages de mathématique et de physique**. Paris: De L'Imprimerie Royale, 1693. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5493994j/f26.double>. Acesso em: 25 out. 2019.

ADAMSON, D. **Blaise Pascal: mathematician, physicist and thinker about God**. USO: Scholarly and Reference Division, 1995.

ALVES, R.; SEGADAS, C. Sobre o Ensino da Análise Combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. **Revista Acta Scientiae**, V.14, N.3, p.405-420, 2012.

BARBIN, E. Integrating history: research perspectives. In: FAUVEL, J.; MAANEC, J. V. (Org.). **History of Mathematics Education: the ICMI study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

BASTOS, A. C. **Resolução de problemas: uma discussão sobre o ensino de análise combinatória**. 130 folhas. Dissertação (mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica). Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”, Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, Duque de Caxias, 2016.

BASTOS, A. C.; VICTER, E. F.; LOPES, J. R. **Análise Combinatória Desenvolvida com Aspectos Históricos**. 1 ed. São Paulo: Rio de Janeiro: Livre Expressão, 2016.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental**. Versão final. Ministério da Educação. Governo Federal. 2018a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso: 08 maio 2019.

_____. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio.** Versão final. Ministério da Educação. Governo Federal. 2018b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso: 11 set. 2020.

_____. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Apresentação / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/antoniomauroicio/files/2017/11/0_Apresenta%C3%A7ao_pg001-072.pdf. Acesso: 14 jun. 2019.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em 08 nov. 2019.

CASTILHOS, T. B. Reflexões e análises das dificuldades dos alunos e professores do Ensino Médio em Análise Combinatória e Probabilidade. **Revista Eletrônica de Matemática**, V.1, N.2, Caxias do Sul, 2015.

DIAS, G. F. **A História da Matemática como metodologia de ensino:** um estudo a partir do Tratado Sobre o Triângulo Aritmético de Blaise Pascal. 193 folhas. Tese (doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, Natal, 2014.

ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA. **Pascalina.** 2019. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/Pascaline/images-videos#/media/1/725527/112407>. Acesso em: 20 out. 2019.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FAUVEL, J. Using history in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, V. 11, N. 2, p.3-6, 1991.

FONSECA, A. J. S. **O ensino da Análise Combinatória**: um estudo dos registros de representações semióticas por meio de uma sequência didática. 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Sergipe, São Cristóvão, 2015.

FOSSA, J. A. Aplicação do Triângulo de Pascal. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 4, n.11, p.22-34, 2017.

FRANZON, C. R. P. Leibniz e seu primeiro ensaio sobre linguagem universal – o Dissertatio De Arte Combinatória. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 15, 2016, Florianópolis. **[Anais eletrônicos...]**. Florianópolis: UFSC, 2016. [17] p. Disponível em: https://www.15snhct.sbhc.org.br/resources/anais/12/1471182362_ARQUIVO_LeibnizeseuprimeiroensaiodaLinguagemUniversal.pdf. Acesso em: 28 set. 2019.

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 2013. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

GRESSLER, L. A. **Introdução à pesquisa: projetos e relatórios**. 2 ed. rev. São Paulo: Loyola, 2004. 295 p.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**, vol. 2. 7 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contadas pelos números e pelo cálculo. Vol. 1. Trad.: Alberto Munõz; Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KATZ, V. J. **A history of mathematics**. 3 ed. Boston: Pearson, 2009.

KOBISKI, J. C.; JOUCOSKI, E. **A utilização do recurso da História da Matemática em sala de aula, pelo professor de matemática**. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, v. 1, Paraná, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2008_ufpr_mat_artigo_jurema_cit_kobiski.pdf. Acesso em: 08 nov. 2019.

LEIBNIZ, G. W. **Dissertatio De Arte Combinatoria**. 1666. Disponível em: <http://www.rarebookroom.org/Control/leiart/index.html>. Acesso em: 01 set. 2019.

_____. **Dissertation acerca del arte combinatoria**. Tradução: Manuel Antonio Correia M. Universidad Católica de Chile. Chile: Editorial Universitaria S. A., 1992.

_____. **Dissertation on the Art of Combinations**. Tradução: Leroy E. Loemker. **Philosophical Papers and Letters**. The New Synthese Historical Library (Texts and Studies in the History of Philosophy), vol 2. Springer, Dordrecht, 1989.

LOPES, L. S.; FERREIRA, A. L. A. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75–88, nov. 2013.

MARTINES, M. C. S.; BONFIM, S. H. **Análise Combinatória: um estudo via história da matemática**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

MENDES, I. A. **Tendências Metodológicas no Ensino de Matemática**. Belém: EdUFPA, 2008.

MIGUEL, A. et al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

MOREIRA; CLARETO. Compondo narrativas sobre a História da Matemática. **Anais Ebrapem**, 2011.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Académie des Sciences**. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. 2004. Disponível em: <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Societies/Paris.html>. Acesso em: 25 out. 2019.

_____. **Bernard Frenicle de Bessy**. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. 2014. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frenicle_de_Bessy.html. Acesso em: 25 out. 2019.

_____. **Blaise Pascal**. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. 1996. Disponível em: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Pascal.html>. Acesso em: 25 out. 2019.

_____. **Gottfried Wilhelm von Leibniz**. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. 1998. Disponível em: <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz.html>. Acesso em: 13 set. 2019.

OLIVEIRA, Z. V.; MARTINS, E. B. **Instrumentos Matemáticos para o ensino: uma proposta didática usando as barras de calcular de John Napier**. In: OLIVEIRA, Z. V.; ALVIM, M. H. (Org.) *Propostas didáticas para o ensino de ciências e de matemática [recurso eletrônico]: abordagens históricas*. Santo André, SP: Universidade Federal do ABC, 2020, p. 269.

PAIVA, M. **Matemática**. 1ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PASCAL, B. **Traite Du Triangle Arithmetique**. Avec Quelques Autres. Petits Traités Sur La Même Matière. Paris, 1665. Disponível

em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012/f106.image.texteImage>. Acesso em: 26 out. 2019.

_____. **Tratado sobre o triângulo aritmético**. 180 p. Tradução: John A. Fossa; Fabrício Possebon. Natal: EDUFRN, 2013.

PINTO, R. C. Introdução à Análise Combinatória. Dissertação de mestrado (Mestre em matemática). 59 f. Rio de Janeiro, 2014.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar, 2012. 511 p.

SANTINHO, M. S.; MACHADO, R. S. **Os Fascinantes Quadrados Mágicos**. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal de Goiás. 2006. Disponível em: <http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/miriam.rosa.pdf>. Acesso em: 26 out. 2019.

SILVA, V. D. M.; SILVA, A. S.; SILVA, T. A. Utilizando a história da matemática no ensino da análise combinatória e probabilidade. **IX EPBEM**, 2016.

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática**. 1ed. São Paulo: FTD, 2010.

TAVARES, C. S.; BRITO, F. R. M. Contando a história da contagem. **Revista do Professor de Matemática**, 57, 2005.

TERRA, M. R. **O desenvolvimento humano na Teoria de Piaget**. Instituto de Estudos da Linguagem da Unicamp. 2005. Disponível em: <https://www.unicamp.br/iel/site/alunos/publicacoes/textos/d00005.htm>. Acesso em: 11 jun. 2019.

VASQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8. **Anais do VIII ENEM**. Recife, 2004.

VILLALBA, C.U.; MARTÍNEZ, A.R. **En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La transcendencia (II)**, 2005, n. 49, p. 55-62, jun, 2005. Disponível em: <https://revistasuma.fespm.es/revistas>. Acesso em: 07 out. 2020.

WIKIMEDIA. **Máquina de calcular de Gottfried Wilhelm Leibniz** em exibição no museu Technische Sammlungen em Dresden, Alemanha. 2006. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=925505>. Acesso em: 12 set. 2019.



AS AUTORAS

LARISSA SENE ARAÚJO Graduação em Matemática - licenciatura (2017-2019) e em Engenharia Ambiental - bacharel (2010-2014) ambas pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM; Mestrado em Ciências da Engenharia Ambiental (2015-2017) pela Universidade de São Paulo – USP.

E-mail: *larissa_sene@hotmail.com*

MÔNICA DE CÁSSIA SIQUEIRA MARTINES Graduação em Matemática – licenciatura (1996-1999) pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Unesp); Especialista em Matemática Universitária (2006-2007) pela Unesp; Mestrado (2008-2009) e doutorado (2010-2014) em Educação Matemática pela Unesp.

E-mail: *monica.siqueiramartines@uftm.edu.br*



VOLUMES DESTA SÉRIE

1	Aproximações entre matemática, literatura e história: reflexões sobre o ensino e a pesquisa <i>Rafael Montoito Andreia Dalcin Diogo Franco Rios</i>
2	Aspectos históricos da origem e desenvolvimento do cálculo vetorial <i>Sabrina Helena Bonfim Angelica Raiz Calábria</i>
3	Conceitos geométricos em artesanatos e grafismos indígenas: uma tradição histórico-cultural de uma comunidade Guarani <i>Rhuan Guilherme Tardo Ribeiro Suélen Rita Andrade Machado Lucieli M. Trivizoli</i>
4	A matemática do ensino de frações: Do século XIX à BNCC <i>Rosilda dos Santos Morais Luciane de Fatima Bertini Wagner Rodrigues Valente</i>
5	Geometria da régua: As construções geométricas de Jean-Victor Poncelet (1788-1867) <i>Gerard Emile Grimberg Jansley Alves Chaves Magno Luiz Ferreira</i>
6	História da Matemática na Educação Básica: Atividades para o ensino de equação do primeiro grau com uma incógnita <i>Letícia Sousa Carvalho Mariana Feiteiro Cavalari Eliane Matesco Cristovão</i>
7	História das equações quadráticas na civilização islâmica medieval: uma visita ao método de resolução de Ibn Turk <i>Jéssica Targino Muniz Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes</i>

8	História, Tecnologias e Matemática: uma aliança para conteúdos do 8º ano em conformidade com a BNCC <i>Alison Luan Ferreira da Silva Giselle Costa de Sousa</i>
9	Tópicos de História da Matemática Islâmica Medieval <i>Bernadete Barbosa Morey Davidson Paulo Azevedo Oliveira Ana Paula Pereira do Nascimento</i>
10	Análise combinatória: um estudo usando a história da matemática em sala de aula <i>Larissa Sene Araújo Mônica de Cássia Siqueira Martines</i>