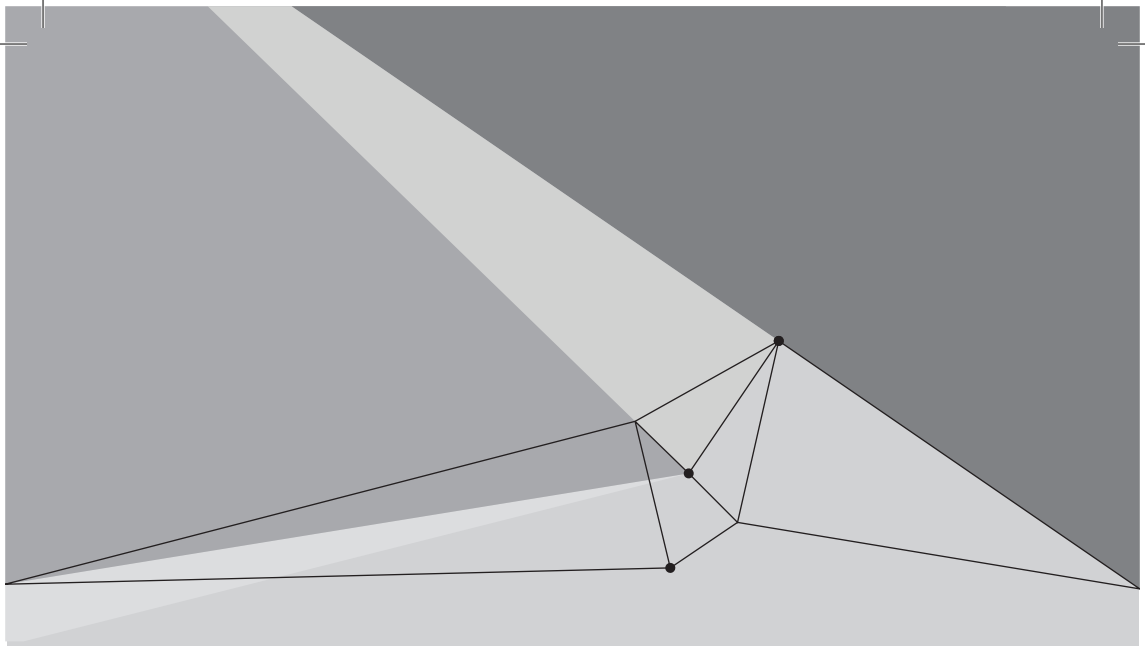


Simetria - História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar

Volume 9

LF EDITORIAL

Sociedade Brasileira de História da Matemática

Regina Célia Guapo Pasquini
Humberto José Bortolossi

Simetria - História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar

Volume 9

LF EDITORIAL

Sociedade Brasileira de
História da Matemática

Série História da Matemática para o Ensino
VOLUME 9

Editor responsável: José Roberto Marinho
Coordenadores da Série: Iran Abreu Mendes e Bernadete Morey
Coedição: Sociedade Brasileira de História da Matemática

Capa, Projeto Gráfico e Diagramação: Waldelino Duarte
Revisão: Os autores

Diretoria da SBHMAT
Presidente: Sergio Nobre (UNESP)
Vice-Presidente: Clóvis Pereira da Silva (UFPR)
Secretário Geral: Iran Abreu Mendes (UFRN)
Tesoureiro: Bernadete Morey (UFRN)
1° Secretário: Mariana Feiteiro Cavalari (UNIFEI)
Membros Conselheiros: Romélia Alves Souto (UFSJ)
Lígia Arantes Sad (UFES)
Conselho fiscal: Fabio Maia Bertato (UNICAMP)
Carlos Roberto Moraes (UNIARARAS)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Pasquini, Regina Célia Guapo
Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar / Regina Célia Guapo Pasquini, Humberto José Bortolossi. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. – (Série história da matemática para o ensino; v. 9)

Bibliografia
ISBN 978-85-7861-308-2

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Professores - Formação 3. Simetria (Matemática) - História I. Bortolossi, Humberto José. II. Título. III. Série.

15-00834 CDD-510.7

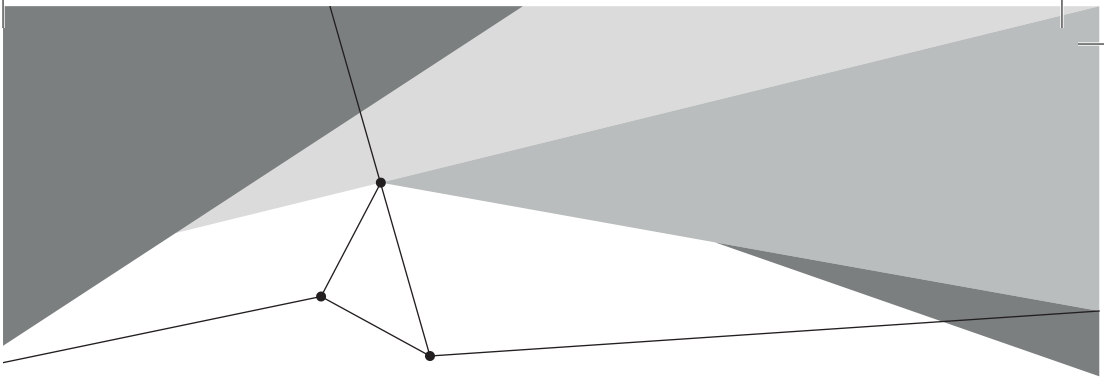
Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei no 9.610, de 19 de fevereiro de 1998

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

Comissão Científica do
XI Seminário Nacional de História da Matemática - XI SNHM

Iran Abreu Mendes	Presidente da Comissão - UFRN
Antonio Vicente Marafioti Garnica	UNESP/Rio Claro; UNESP/Bauru
Bernadete Barbosa Morey	UFRN
Carlos Henrique Barbosa Gonçalves	USP
Carlos Roberto Moraes	UNIARARAS/SP
Eva Maria Siqueira Alves	UFS
Fabio Maia Bertato	UNICAMP
Fernando Guedes Cury	UFRN
Fumikazu Saito	PUC/SP
Giselle Costa Sousa	UFRN
Ítala Maria Loffredo D'ottaviano	UNICAMP
João Cláudio Brandemberg Quaresma	UFPA
John Andrew Fossa	UFRN
Lígia Arantes Sad	UFES
Liliane dos Santos Gutierre	UFRN
Lucieli Trivizoli	UEM/PR
Marcos Vieira Teixeira	UNESP/Rio Claro
Maria Célia Leme da Silva	UNIFESP/SP
Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha	IFPA
Mariana Feiteiro Cavalari	UNIFEI/MG
Maria Terezinha de Jesus Gaspar	UNB/DF
Miguel Chaquiam	UEPA/PA
Romélia Mara Alves Souto	UFSJ/MG
Sergio Roberto Nobre	UNESP/RIO Claro
Tatiana Roque	UFRJ
Ubiratan D'Ambrosio	USP
Wagner Rodrigues Valente	UNIFESP/SP



Sumário

Abertura 9

Agradecimentos 11

Dedicatórias 13

1. Introdução 15

2. O que é simetria? 19
   2.1 – O que é "simetria" para você? 21
   2.2 – A palavra "simetria" no contexto escolar 22
   2.3 – Procurando pelos significados da palavra "simetria" 24
   2.4 – Simetria e História 26

3. O conceito moderno de simetria: invariância 33
   3.1 – Simetrias no plano e no espaço 35
   Entendendo a Condição 1: isometrias 36
   Entendendo a Condição 2: invariância 45
   3.2 – Simetrias e Teoria de Grupos 47

4. Legendre e o conceito moderno de simetria 57
   4.1 – Vida e atuação de Legendre na Matemática 59
   4.2 – O conceito moderno de simetria 69

5. O conceito antigo de simetria: proporcionalidade 73
5.1 – Simetria, arquitetura e Vitruvius 75
5.2 – Comensurabilidade e Euclides 79

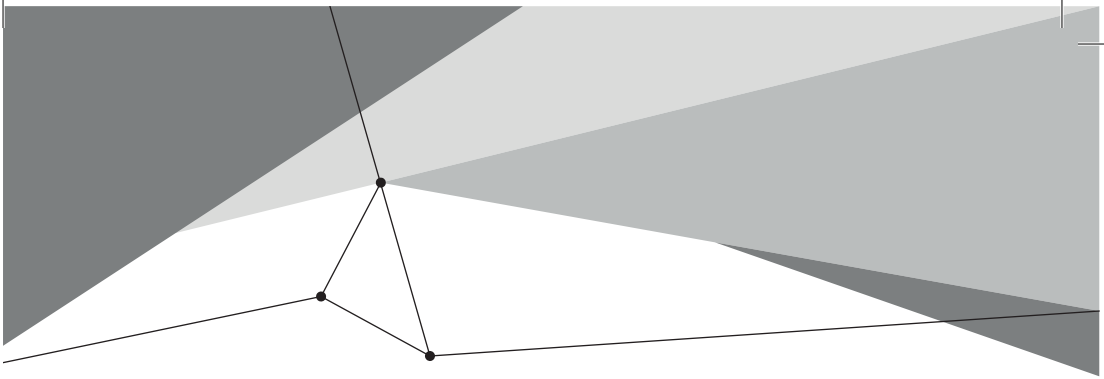
6. Simetria na Educação Básica 83
6.1 – O conceito de simetria nos PCN 85
6.2 – O conceito de simetria em outras orientações curriculares 89
6.3 – O conceito de simetria nos livros didáticos 92

7. Desdobramentos e considerações finais 95

Bibliografia 101

Sobre os Autores 107

Volumes desta Série 109



Abertura

A coleção história da matemática para professores teve sua origem no IV Seminário Nacional de História da Matemática (IV SNHM), realizado em Natal/RN, em 2001. Naquele ano foram publicados nove títulos referentes a temas variados. A receptividade dos textos, por parte de estudantes de licenciatura em matemática e por professores dos três níveis de ensino (fundamental, médio e superior), fez com que a sociedade brasileira de história da matemática levasse em frente o projeto, de modo a contribuir para a divulgação e uso dessa produção nas aulas de matemática nos diversos níveis de ensino.

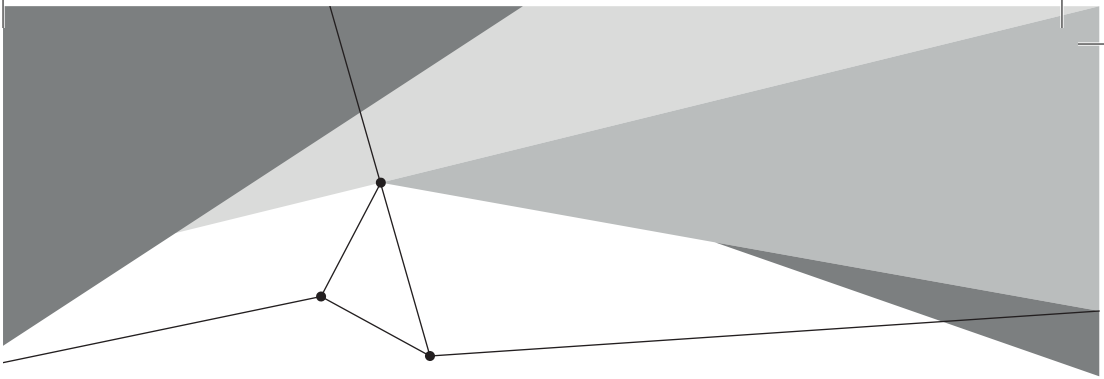
Com essa finalidade seguiram-se as coleções do V SNHM (2003), em Rio Claro/SP; VI SNHM (2005), em Brasília/DF; do VII SNHM (2007), em Guarapuava/PR; do VIII SNHM (2009), em Belém/PA; do IX SNHM (2011), em Aracaju/SE e do X SNHM (2013) em Campinas/SP.

Para o XI SNHM de 2015, consideramos importante apresentar aos estudantes de licenciatura em matemática e professores do ensino fundamental, médio e superior de todo o Brasil, um rol mais diversificado de temas, tendo em vista o avanço dos estudos sobre história e educação matemática nos diversos centros de estudos do país. Nessa perspectiva organizamos os 10 volumes da coleção História da Matemáti-

ca para o ensino, que contou com o apoio da Editora Livraria da Física, do CNPq e da CAPES.

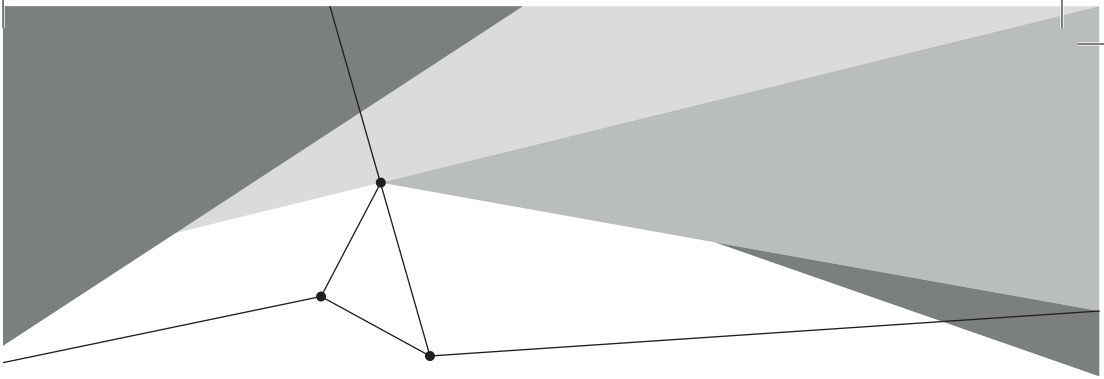
Este volume trata de *Simetria*: um conceito-chave em Matemática, com aplicações importantes em áreas como Física, Química, Biologia, Cristalografia, Arquitetura, entre outras. Ao longo da História, a palavra "Simetria" teve diferentes significados culminando com o conceito moderno de invariância por um grupo de transformações. Neste livro ou autores contrapõem este desenvolvimento histórico com o contexto escolar (currículo e livros didáticos) com ênfase especial no conceito moderno de simetria.

Iran Abreu Mendes
Bernadete Morey
Coordenadores da Série



Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a Karla Nogueira Waack, Ednaldo Vasconcelos da Rocha e Alan Pizzo por se disporem a ler, revisar e criticar o texto original. Os autores também agradecem aos professores Giora Hon e Bernard R. Goldstein pelas referências dadas em trocas de *e-mail* entre o Natal e o Ano Novo de 2014 e ao professor Marco Moriconi pela indicação do livro do Feynman.



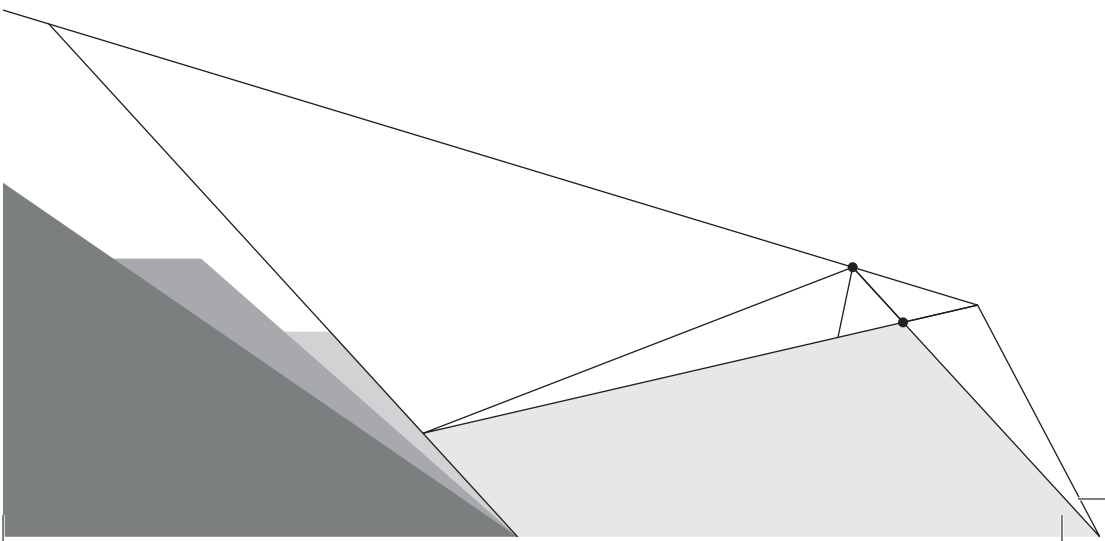
Dedicatórias

Regina dedica este trabalho ao seu amado esposo José Almir.

Humberto dedica este trabalho a sua amada esposa Joselí Maria e a sua amada filha Hillary Winry.

1

Introdução



Simetria é um conceito-chave em Matemática com aplicações importantes em áreas como Física, Química, Biologia, Cristalografia, Arquitetura, entre outras. Ao longo da História, a palavra "simetria" teve diferentes significados culminando com o conceito moderno de invariância por um grupo de transformações. Neste minicurso iremos contrapor este desenvolvimento histórico com o contexto escolar (currículo e livros didáticos) com ênfase especial no conceito moderno de simetria. O tema é um campo fértil para discussões sobre as abordagens anacrônica e diacrônica da História da Matemática.

O estudo que faremos aqui pressupõe que você participe ativamente por meio das várias tarefas e atividades intercaladas ao longo do texto. Estas tarefas vêm em cinco sabores: (1) atividades computacionais interativas feitas com o GeoGebra (que podem ser acessadas via *smartphones* mais recentes, *tablets*, computadores *desktop* e *laptops*), (2) atividades com material concreto (cartolina, transparências e planificações), (3) exercícios de Matemática, (4) reflexões sobre a prática e (5) análises de documentos de orientação curricular, livros didáticos e fragmentos de textos históricos (em um certo ponto, iremos até mesmo analisar uma pequena frase em grego e, lá, você perceberá o porquê disto ser necessário para justificar uma determinada afirmação histórica).

Os capítulos estão divididos da seguinte forma: no Capítulo 2 fazemos uma reflexão inicial dos significados da palavra "simetria", das abordagens históricas que podem ser usadas para analisar estes significados e um resumo das conclusões históricas obtidas pelo tratado de Hon e Goldstein (2008); no Capítulo 3 estudamos o conceito moderno de sime-

tria no contexto de Geometria Euclidiana Plana; no Capítulo 4 apresentamos o importante papel de Adrien-Marie Legendre na história da simetria; no Capítulo 5 são apresentados os significados da palavra "simetria" na Antiguidade, mais precisamente, em *Os Elementos* de Euclides e nos *Dez Livros de Arquitetura* de Vitruvius; no Capítulo 6 trazemos uma análise de como o conceito de simetria é tratado em documentos de orientação curricular e em livros didáticos; por fim, no Capítulo 7, pontuamos uma conexão entre simetria e Física e sugerimos alguns questionamentos para reflexão.

O gérmen deste texto nasceu do trabalho de orientação do segundo autor com o então aluno Carlos Octávio de Abreu e Silva Mendes em 2013 na Universidade Federal Fluminense (MENDES; BORTOLOSSI, 2014).

2

O que é simetria?

2.1 – O que é "simetria" para você?

Uma mesma palavra pode ser usada em diferentes épocas por diferentes pessoas com os mais variados significados (muitas vezes, incompatíveis entre si). Mais ainda: não é raro que uma mesma pessoa use o mesmo termo com interpretações diferentes em momentos diferentes. Sem conhecer a definição que está sendo adotada, interpretações equivocadas podem aparecer: como nos lembra *Humpty Dumpty*, personagem do livro "Através do Espelho e o Que Alice Encontrou por Lá" de Lewis Carroll: o importante é saber *quem está ditando as regras* (Figura 1).

Figura 1 – Humpty Dumpty e o significado das palavras

Fonte: *Wikimedia Commons*, 2011.

Portanto, antes de começarmos, é muito importante conhecermos o que é "simetria" para você e, também, como este conceito lhe foi apresentado em sua formação escolar. Neste sentido, como atividade preparatória, responda às perguntas a seguir em uma folha em branco (se desejar, junte-se a um colega para trocar ideias). Faremos uma discussão conjunta em seguida.

Pergunta 1: O que é simetria para você?

Pergunta 2: Na sua opinião, o que significa dizer que uma figura é simétrica?

Pergunta 3: Na sua opinião, o que significa dizer que uma figura é simétrica a outra?

Pergunta 4: Na sua opinião, por que é importante aprender simetria?

Pergunta 5: Você estudou simetria em sua graduação? Em caso afirmativo, em quais disciplinas?

Pergunta 6: Na sua opinião, quando, como e com quem surgiu o conceito de simetria?

2.2 – A palavra "simetria" no contexto escolar

Certamente o termo *simetria* faz parte do universo escolar. Aqui estão, por exemplo, algumas frases típicas com o uso do termo e suas derivações em textos de exames que dão acesso ao Ensino Superior (os grifos são nossos):

- "No poema de Bandeira, importante representante da poesia modernista, destaca-se como característica da escola literária dessa época (a) [...] (b) [...] (c) a criativa

simetria de versos para reproduzir o ritmo do tema abordado. (d) [...] (e) [...]" (ENEM 2006).

- "Nas últimas décadas do século XVIII e no início do século XIX, os artistas criaram obras em que predominam o equilíbrio e a **simetria** de formas e cores, imprimindo um estilo caracterizado pela imagem da respeitabilidade, da sobriedade, do concreto e do civismo." (ENEM 2010).
- "No desenho de Niemeyer, das colunas do Palácio da Alvorada, observa-se (a) [...] (b) [...] (c) a **disposição simétrica** das curvas, conferindo saliência e distorção à base. (d) [...] (e) [...]" (ENEM 2011).
- "Uma reta intersecciona nos pontos A (3, 4) e B (– 4, 3) uma circunferência centrada na origem. (a) [...] (b) Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos A e B e seus **simétricos** em relação à origem." (Vestibular UNICAMP, 1999).
- "[...] (b) Você concordaria com a afirmação de que houve uma relação de **simetria** entre a cultura branca e a dos negros e índios durante o período colonial? Sim ou não? Justifique." (Vestibular UNICAMP 2000).
- "Os animais podem ou não apresentar **simetria**. Considere os seguintes animais: planária, esponja, medusa (água-viva), minhoca, coral e besouro. (a) Quais deles apresentam **simetria radial**? E quais apresentam **simetria bilateral**? (b) Caracterize esses dois tipos de **simetria**. (c) Por que a **simetria radial** da estrela-do-mar é considerada secundária?" (Vestibular UNICAMP 2002).
- "A globalização pode ser descrita como um processo de difusão de idéias e valores, de formas de produção e de trocas comerciais que atravessam e rompem as fronteiras nacionais. As opções abaixo apresentam exemplos da teia global, À EXCEÇÃO: (a) [...] (b) [...] (c) [...] (d) da **simetria** dos circuitos da mídia e da in-

formação eletrônica com uma recíproca fertilização cultural. (e) [...]" (Vestibular PUC-Rio 2003).

- "Uma lâmina de barbear das antigas flutua quando deitada cuidadosamente sobre a superfície da água contida em um copo. Este fenômeno é explicado por uma causa imediata que é (a) [...] (b) a **simetria** das ligações de hidrogênio. (c) [...] (d) [...]" (Vestibular UECE 2014.2).
- "A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com **eixo de simetria vertical**, como ilustrado na figura. [...]" (FUVEST 2015).

Como podemos observar com estes exemplos, a palavra simetria é usada não só em Matemática, mas também em áreas como História, Geografia, Português, Biologia, Química e Física.

Tarefa 1: Você conhece outras situações do uso do termo simetria no contexto escolar? Tente fazer uma lista enumerando os exemplos do Ensino Básico e do Ensino Superior que você se lembra (você não precisa se restringir à área da Matemática). Faremos uma discussão conjunta em seguida.

2.3 – Procurando pelos significados da palavra "simetria"

Com tantas locuções em áreas e situações tão diversas, o que é simetria, afinal? Para tentar obter uma resposta, uma iniciativa natural seria tentar procurar pelo significado desta palavra em dicionários, enciclopédias e mesmo na Internet.

Tarefa 1: A seguir transcrevemos as quatro acepções para a palavra "simetria" dadas pela Versão 3.0 do Dicionário Houaiss Eletrônico (Junho de 2009). Qual delas lhe parece mais familiar? Qual delas lhe parece mais estranha? Por quê?

Simetria Datação 1563-1570

Acepções

- substantivo feminino
    1. conformidade, em medida, forma e posição relativa, entre as partes dispostas em cada lado de uma linha divisória, um plano médio, um centro ou um eixo
    2. Derivação: por extensão de sentido semelhança entre duas ou mais situações ou fenômenos; correspondência
    3. conjunto de proporções equilibradas
    4. Rubrica: matemática. Propriedade de uma função que se mantém invariável sob determinadas transformações

Tarefa 2: Procure pela definição de simetria em outras fontes (Wikipedia, enciclopédias e livros) e tente compará-las com as acepções dadas pelo Dicionário Houaiss.

Tarefa 3: O livro *Origins of Mathematical Words: A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek, and Arabic Roots* de Anthony Lo Bello dá a seguinte informação para a origem da palavra simetria (tradução nossa): "O adjetivo grego σύμμετρος significa *medido ou comensurado com*, *de mesma medida ou tamanho de*, a partir de σύν, *com*, e μέτρον, *uma medida*. Do adjetivo forma-se o nome συμμετρία, que significa *devida proporção*.". Na sua opinião, as acepções dadas pelo Dicionário Houaiss estão em consonância com a origem grega da palavra "simetria"? (E as definições que você encontrou na Tarefa 2?)

2.4 – Simetria e História

Uma maneira de se entender melhor os vários significados dados à palavra "simetria" é tentar estudar os usos da palavra ao longo do tempo. Um leitor interessado poderá encontrar vários livros já publicados sobre história da simetria: Weyl (1952), Mainzer (1988), Yaglom (1988), Brading e Castellani (2003), Livio (2006), Darvas (2007), Hon e Goldstein (2008) e Stewart (2012).

Nosso trabalho se alinhará com as ideias de Hon e Goldstein (2008), motivados principalmente pela preocupação firme que os autores demonstram em tentar estudar, compreender e apresentar de forma diacrônica (isto é, **não anacrônica)** a evolução histórica dos conceitos associados à palavra "simetria".

Não é nossa intenção aqui detalhar as abordagens historiográficas da história da Ciência e da Matemática (para o leitor interessado, sugerimos o Capítulo III de Borges (2010) e as referências lá indicadas), contudo, acreditamos ser muito importante, para o que se segue, que você, leitor, tenha uma compreensão do que significa *anacronismo* em historiografia. Segundo Martins (2005), o anacronismo consiste em "estudar o passado com os olhos do presente".

Vamos começar com um exemplo bem simples: considere a célebre pintura renascentista "A Última Ceia" (Figura 2) de Leonardo da Vinci (1452-1519). A leitura para o evento bíblico dada por da Vinci é anacrônica, pois ele retrata um tempo histórico utilizando elementos que não pertencem a esse mesmo tempo histórico: os rostos têm aparência italiana; as vestimentas adotadas no estilo toga e capa têm pouca relação com a roupa tradicional judaica; a paisagem ao fundo lembra mais a Toscana do que a Palestina; e até mesmo o formato retangular da mesa e as pessoas sentando-se apenas de um lado (MCCOUAT, 2014).

Figura 2 – "A Última Ceia" de Leonardo da Vinci

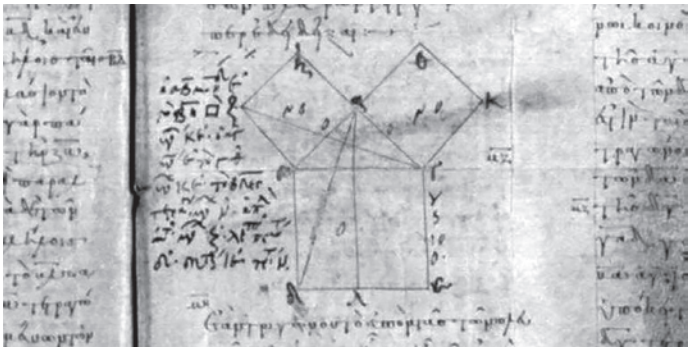
Fonte: *Wikimedia Commons*, 2008.

No contexto mais específico de história da Ciência e da Matemática, o anacronismo (também chamado, neste contexto, de interpretação Whig da História) pode ser visto como a abordagem de se interpretar feitos históricos de uma dada época à luz de conceitos e ideias que foram estabelecidas em épocas posteriores, ou ainda, dar a um agente do passado um conhecimento que ele de fato não possuía em sua época (WEIL, 1978).

Tarefa 1: (Seguindo Grattan-Guinness (2005)) Na escola, o Teorema de Pitágoras é usualmente enunciado assim: em um triângulo retângulo, se a é a medida de sua hipotenusa e se b e c são as medidas de seus catetos, então $a^2 = b^2 + c^2$. Você acha que este enunciado do Teorema de Pitágoras é anacrônico? Por quê?

Tarefa 2: Procure pelo enunciado do Teorema de Pitágoras como dado originalmente no livro *Os Elementos* de Euclides e compare com o enunciado dado na Tarefa 1 (a Figura 3 exibe o diagrama que acompanha o enunciado original do teorema).

Figura 3 – Fragmento de uma edição manuscrita em grego do Século IX de *Os Elementos* de Euclides



Fonte: Biblioteca do Congresso dos EUA, 2011.

O leitor interessado poderá encontrar outros exemplos de abordagens anacrônicas em História da Matemática em Roque (2012), Grattan-Guinness (2005) e Weil (1978).

Mas, qual é o problema com a abordagem anacrônica? Segundo Hon e Goldstein (2008, p. 41, tradução nossa):

> O problema com o anacronismo é que ele torna um analista em um ator, isto é, um participante no processo de criação do conhecimento científico, não importando se este conhecimento pertence ao tempo antigo, medieval ou moderno. Em contraste, nosso objetivo é identificar e analisar os princípios filosóficos subjacentes do texto científico em mãos – a metodologia que tem sido aplicada pelo autor – fazendo uso de conceitos e teorias que estavam disponíveis ao praticante da época no lugar de conceitos e teorias que foram introduzidas subsequentemente. Este não é o caso quando o analista assume o papel de um ator: não somente ele introduz considerações estranhas ao texto em discussão, mas estas percepções do analista (e seus sucessores) mudam com o tempo, uma vez que conceitos filosóficos, padrões de rigor, etc., evoluem.

Ressaltamos que nem todos os acadêmicos veem o anacronismo como um mal a ser evitado a todo custo. Grattan-Guinness (2005), por exemplo, dá um nome mais suave para a abordagem anacrônica: *herança* (*heritage*, em Inglês). Com vários exemplos, ele tenta mostrar ao seu leitor que "história" e "herança" são duas maneiras legítimas de se trabalhar com a matemática do passado, mas que, confundi-las ou afirmar que uma é subordinada à outra, não o é. Roy (2009, p. 535, tradução nossa) também afirma:

> Muito da pesquisa histórica é sobre desaprender conhecimentos anacrônicos contemporâneos. O propósito da pesquisa é articular, com base em evidência textual e material, o que realmente aconteceu no passado. Mas as coisas que consideramos como certas mudam e, portanto, mudam os anacronismos que devemos desaprender. Este é o motivo pelo qual a pesquisa histórica nunca irá descansar. E, assim, se desaprendermos tudo que é suspeito de ser anacrônico, devemos também desaprender nossa linguagem contemporânea, arriscando ficarmos mudos; podemos terminar com nada mais do que reproduções de evidência material e textual. Desta maneira, a reconstrução transparente de um passado puramente objetivo deve ceder a uma economia crítica de anacronismos.

Tarefa 3: (HON; GOLDSTEIN, 2008, p. 13) Para refletir: podemos afirmar que uma pessoa que usa um conceito intuitivamente sem ter consciência de que está usando o conceito sabe então o conceito? Por exemplo, uma pessoa que fala em prosa, sem ter consciência de que o está fazendo, sabe o conceito de prosa? Qual é a sua opinião?

Terminamos este capítulo pontuando algumas considerações de Hon e Goldstein (2008) com relação ao conceito de simetria.

- O conceito moderno de simetria refere-se a uma relação lógico-matemática ou uma propriedade intrínseca de uma entidade matemática as quais, sob uma certa classe de transformações (tais como rotações, reflexões, inversões ou outras operações abstratas) deixam algo inalterado (invariante). Daremos mais detalhes no próximo capítulo.
- É um senso comum que simetria é um conceito inato que sempre esteve disponível para o pensamento humano. Hon e Goldstein defendem (e tentam demonstrar em seu livro) que não existe evidência que suporte esta ideia. Mais ainda: eles argumentam que esta perspectiva imposta por historiadores e filósofos é *anacrônica* (ou seja, por meio de uma análise do passado com elementos que não estavam disponíveis no passado). Não existe termo ou expressão em textos antigos que conotem o conceito moderno de simetria: simetria, como é atualmente aplicada em vários domínios científicos, é inteiramente diferente do que se entendia pelo termo, simetria, em tempos antigos.
- Em seu livro, Hon e Goldstein adotaram a seguinte metodologia de trabalho: pesquisar pela maneira que o termo, simetria, foi de fato usado, ao invés de identificar o conceito em passagens onde o termo não aparece. Segundo estes autores, a história de um conceito não pode estar inteiramente divorciada das palavras usadas para articulá-lo. Mais ainda: eles distinguem capacidade de reconhecer simetria do conceito de simetria e de sua articulação explícita, isto é, para eles, existe uma clara diferença entre a concepção de um conceito e atribuir um nome a ele, por um lado, e intuitivamente aplicar o conceito sem estar ciente desta aplicação, por outro (uma pessoa pode não saber que está falando em prosa ao fazê-lo).
- Simetria (grego: *summetria*, latim: *symmetria*) teve um único significado básico na Grécia antiga: proporcio-

nalidade. Seu uso pode ser distinguido pelos contextos nos quais o termo foi invocado: (1) no contexto matemático, ele significava que duas quantidades compartilhavam uma medida comum, isto é, que elas eram comensuráveis (como faziam Platão, Aristóteles, Euclides e Arquimedes) e, (2) no contexto avaliativo (por exemplo, na apreciação da beleza), ele significava proporção devida (adequada) (compare com a acepção 3 dada pelo Dicionário Houaiss) como faziam, por exemplo, Ptolomeu no Almagesto e Vitruvius em sua teoria da arquitetura.

- Do ponto de vista epistemológico e metodológico, segundo os autores, diferentemente do que ocorre com qualquer outro conceito científico, simetria (isto é, o conceito moderno de simetria) é aplicável em questões do método científico bem como ao conteúdo da ciência: simetria pode ser considerada como o único conceito científico que incorpora a própria prática da investigação científica. Neste contexto, simetria, além de uma propriedade, também pode ser usada como um argumento, um princípio.
- Os autores defendem que o significado de simetria como é entendido atualmente surgiu apenas em 1794 com a obra *Elementos de Geometria* de Adrien-Marie Legendre, no contexto que descreveremos no Capítulo 4.

3

O conceito moderno de simetria: invariância

O conceito moderno de simetria (aquele usado em áreas como Física, Química, Biologia, etc.) se apoia na ideia de **invariância**: de forma geral, uma simetria de um objeto S que possui uma determinada estrutura é uma *função* de S em S que preserva (isto é, deixa invariante) esta estrutura (GOWERS, 2008, p. 18).

Para que você possa entender um pouco mais o significado desta definição vamos, neste capítulo, explorar simetrias de subconjuntos do plano $\mathbb{R}^2$ e do espaço $\mathbb{R}^3$ quando munidos com a estrutura dada pela geometria euclidiana. Nesta trilha, não é nosso objetivo apresentar todos os detalhes, justificativas e desdobramentos (isto sairia do escopo deste livro) mas, sim, destacar as ideias e resultados principais. Para o leitor interessado nos detalhes e demonstrações, sugerimos as referências Florêncio (2011), Lima (1996), Baker e Howe (2007) e Martin (1982).

3.1 – Simetrias no plano e no espaço

Vamos apresentar a definição diretamente para, em seguida, comentar os vários elementos que a compõem.

Definição 1. Seja **X** um subconjunto não vazio do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Dizemos que uma função

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

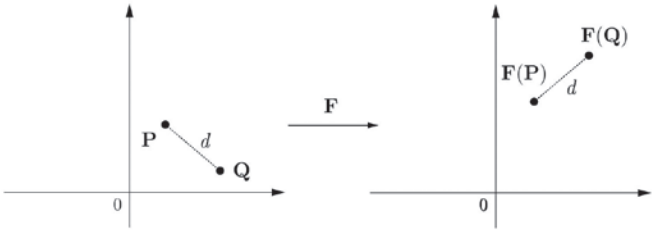
é uma *simetria* do conjunto **X** se **F** satisfaz as duas condições seguintes.

1. **F** é uma *isometria*, isto é, **F** preserva distâncias. Mais precisamente, quaisquer que sejam os pontos **P** e **Q** em $\mathbb{R}^2$, a

distância de **P** a **Q** (no domínio de **F**) é sempre igual a distância de **F**(**P**) a **F**(**Q**) (no contradomínio de **F**) (Figura 4).

2. **F**(**X**) = **X**, isto é, **X** é invariante por **F** (a imagem do conjunto **X** pela função **F** é igual ao próprio conjunto **X**).

Figura 4 – Isometrias preservam distâncias



Note que o conceito moderno usa funções para definir simetrias: toda simetria de um conjunto **X** do plano é, em particular, uma função cujo domínio é o plano e o contradomínio é o plano (e que, também, preserva distâncias e deixa o conjunto **X** invariante). Seguindo a tradição no estudo de simetrias, a partir de agora, usaremos a palavra *transformação* ao denotar uma *função*.

Entendendo a Condição 1: isometrias

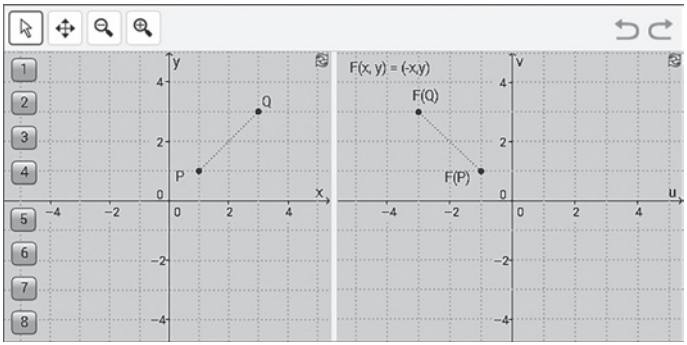
Tarefa 1: Dê exemplos de transformações **F**: $IR^2 \rightarrow IR^2$ que preservam distâncias. Dê exemplos também de transformações **F**: $IR^2 \rightarrow IR^2$ que **não** preservam distâncias. Justifique sua resposta.

Tarefa 2: Acesse o endereço <http://tube.geogebra.org/student/m428511> usando um computador *desktop*, *tablet* ou *smartphone*. Tente identificar quais das oito funções implementadas nesta construção interativa

do GeoGebra são isometrias (Figura 5). Você pode mover os pontos **P** e **Q** (clique/toque e arraste). Para mudar a transformação, clique/toque nos botões. Para a transformação do botão 8, abs(x) significa $|x|$ (o módulo do número real x).

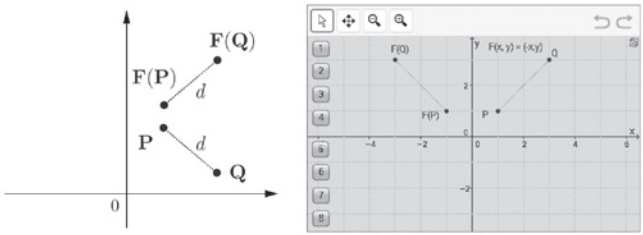
Tarefa 3: A transformação identidade **I**: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que, a cada ponto (x, y) faz associar o próprio ponto (x, y), é uma isometria do plano? Justifique sua resposta!

Figura 5 – Transformações do plano no plano com o GeoGebra: <http://tube.geogebra.org/student/m428511>



Observação importante: enquanto que é uma prática comum representar funções colocando-se domínio e contradomínio separados, como nas Figuras 4 e 5, no caso do estudo de simetrias, em virtude da Condição 2 da Definição 1 (que compara um conjunto **X** do domínio da função com sua imagem **F**(**X**) no contradomínio), o que se faz é sobrepor domínio e contradomínio em um único sistema de eixos coordenados, como na Figura 6. Com isto, fica muito mais fácil de se comparar o conjunto **X** com sua imagem **F**(**X**).

Figura 6 – Domínio e contradomínio em um mesmo sistema de eixos coordenados: <http://tube.geogebra.org/student/m428789>



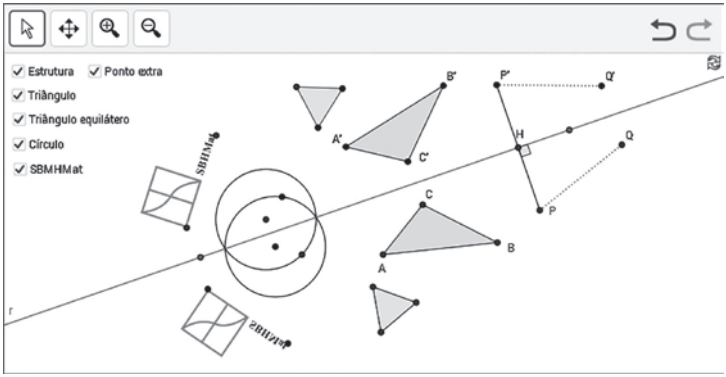
Tarefa 4: Para se habituar com esta nova maneira de visualizar transformações do plano no plano, acesse o endereço <http://tube.geogebra.org/student/m428789> e revisite as oito transformações estudadas na Tarefa 2.

Tarefa 5: No Ensino Médio, aprendemos que uma maneira excelente de se representar geometricamente funções reais f: IR → IR é por meio do seu *gráfico*. Por que, no caso de transformações **F**: $IR^2 \rightarrow IR^2$ do plano no plano, este tipo de representação não é tão conveniente?

Vamos agora ver três exemplos clássicos de isometrias no plano: reflexão em relação a uma reta, translação e rotação. Aqui seguiremos Lima (1996), livro no qual o leitor poderá encontrar as demonstrações de que, de fato, estas transformações são isometrias.

Exemplo 1 (reflexão em relação a uma reta). Seja r uma reta no plano IR^2. A *reflexão em relação a uma reta r* é a transformação $\mathbf{F}_r$: $IR^2 \rightarrow IR^2$ definida da seguinte maneira: $\mathbf{F}_r(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ para $\mathbf{P} \in r$ e, para $\mathbf{P} \notin r$, $\mathbf{F}_r(\mathbf{P}) = \mathbf{P}'$ tal que a mediatriz do segmento $\mathbf{PP}'$ é a reta r, ou seja, se **H** é o pé da perpendicular baixada de **P** sobre r, então **H** é o ponto médio do segmento $\mathbf{PP}'$ (Figura 7).

Figura 7 – Reflexão em relação a uma reta no GeoGebra:
<http://tube.geogebra.org/student/m429027>



Acesse a construção interativa do GeoGebra no endereço <http://tube.geogebra.org/student/m429027> e experimente mover os vários objetos geométricos para perceber a ação da reflexão comparando os objetos originais com suas imagens pela transformação.

Tarefa 6: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas os círculos visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P**′). Agora, tente mover a reta *r* até que o círculo e sua imagem coincidam. Você nota alguma regularidade? Quantas retas *r* possuem esta propriedade?

Tarefa 7: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas os triângulos equiláteros visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P**′). Agora, tente mover a reta *r* até que o triângulo equilátero e sua imagem coincidam. Você nota alguma regularidade? Quantas retas *r* possuem esta propriedade?

Tarefa 8: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas as imagens da logomarca e da sigla SBHMat visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P**′). Agora, tente mover a reta *r* até que as duas imagens coinci-

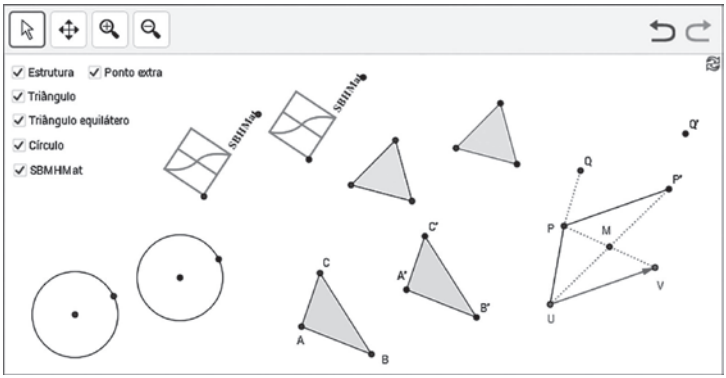
dam. Você nota alguma regularidade? Quantas retas *r* possuem esta propriedade?

Tarefa 9: Uma reflexão por uma reta é uma transformação inversível? Em caso afirmativo, qual é a sua transformação inversa?

Observação: um fato geométrico importante com relação às reflexões em relação a uma reta é que elas invertem orientação. Assim, por exemplo, se, em um triângulo **ABC,** o percurso $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ está no sentido anti-horário, então, no triângulo $\mathbf{A'B'C'}$, o percurso $\mathbf{A'} \rightarrow \mathbf{B'} \rightarrow \mathbf{C'}$ está no sentido horário. Verifique esta propriedade na construção interativa do GeoGebra. Uma isometria que inverte orientação é denominada *oposta* ou *imprópria*. Uma isometria que preserva orientação é denominada *direta* ou *própria*.

Exemplo 2 (translação). Sejam **U** e **V**, nesta ordem, pontos distintos do plano IR^2. A *translação* $\mathbf{T}_{UV}$: $IR^2 \rightarrow IR^2$ é definida da seguinte maneira: dado $\mathbf{P} \in IR^2$, então $\mathbf{T}_{UV}(\mathbf{P}) = \mathbf{P'}$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem **UV** e **UP** como lados, caso **U**, **V** e **P** não sejam colineares (Figura 8). Caso **U**, **V** e **P** sejam colineares, então $\mathbf{T}_{UV}(\mathbf{P}) = \mathbf{P'}$ é tal que $\mathbf{PP'} = \mathbf{UV}$ e, além disso, o sentido do percurso de **P** para **P'** é o mesmo de **U** para **V**. Observação: alguns autores permitem, na definição da translação, que os pontos **U** e **V** sejam iguais: neste caso, a translação $\mathbf{T}_{UV}$ é definida como a função identidade em IR^2.

Figura 8 – Translação no GeoGebra:
<http://tube.geogebra.org/student/m429983>



Acesse a construção interativa do GeoGebra no endereço <http://tube.geogebra.org/student/m429983> e experimente mover os vários objetos geométricos para perceber a ação da translação comparando os objetos originais com suas imagens pela transformação.

Tarefa 10: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas os círculos visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P**′). Agora, tente mover os pontos **U** e **V** até que o círculo e sua imagem coincidam. Você nota alguma regularidade? O que você conclui?

Tarefa 11: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas os triângulos equiláteros visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P**′). Agora, tente mover os pontos **U** e **V** até que o triângulo equilátero e sua imagem coincidam. Você nota alguma regularidade? O que você conclui?

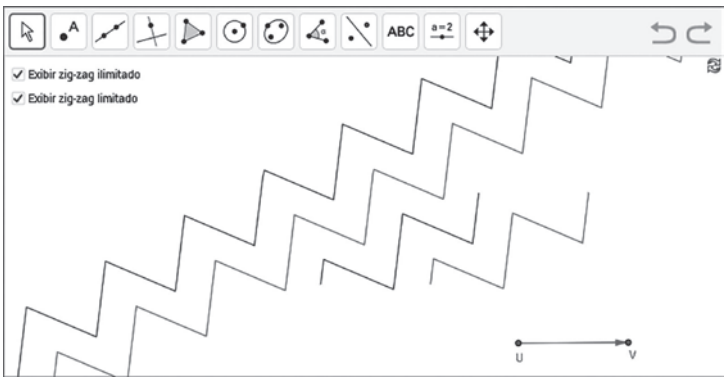
Tarefa 12: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas as imagens da logomarca e da sigla SBHMat visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P**′). Agora, tente mover os pontos **U** e **V** até que a logomarca e

sua imagem coincidam. Você nota alguma regularidade? O que você conclui?

Tarefa 13: Uma translação é uma transformação inversível? Em caso afirmativo, qual é a sua transformação inversa?

Tarefa 14: Acesse a construção interativa do GeoGebra no endereço <http://tube.geogebra.org/student/m430217> (Figura 9). Existem duas curvas *zig-zag* azuis: uma ilimitada (isto é, que se estende para fora dos limites da tela) e outra limitada. As curvas em vermelho são as imagens pela translação $\mathbf{T}_{\mathbf{RS}}$ definidas pelos pontos **U** e **V**. É possível mudar as posições dos pontos **U** e **V** de modo que a curva *zig-zag* ilimitada em vermelho coincida com a curva *zig-zag* ilimitada em azul? É possível mudar as posições dos pontos **U** e **V** de modo que a curva *zig-zag* limitada em vermelho coincida com a curva *zig-zag* limitada em azul?

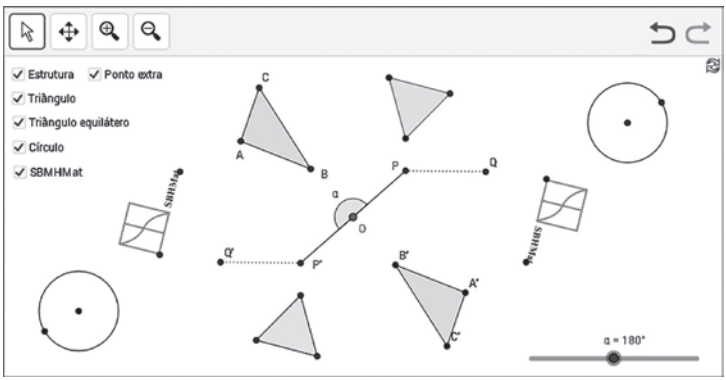
Figura 9 – Translação no GeoGebra:
<http://tube.geogebra.org/student/m430217>



Tarefa 15: A translação é uma isometria direta ou oposta (isto é, ela preserva ou não preserva orientação)?

Exemplo 3 (rotação). Considere **O** um ponto do plano IR^2 e α um ângulo. A *rotação* de ângulo α em torno do ponto **O** no sentido anti-horário é a transformação $\mathbf{R}_{O,\alpha}$: $IR^2 \rightarrow IR^2$ definida da seguinte maneira: $\mathbf{R}_{O,\alpha}(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ e, para todo $\mathbf{P} \neq \mathbf{O}$ em IR^2, $\mathbf{R}_{O,\alpha}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}'$ é o ponto do plano IR^2 tal que a distância de **P** até **O** é igual a distância de **P**′ até **O** e o ângulo **POP**′ tem medida α e está orientado no sentido anti-horário (Figura 10). Uma definição análoga pode ser estabelecida para rotações no sentido horário. O ponto **O** é denominado *centro* da rotação.

Figura 10 – Rotação no GeoGebra:
<http://geogebratube.org/student/m430353>



Acesse a construção interativa do GeoGebra no endereço <http://geogebratube.org/student/m430353> e experimente mover os vários objetos geométricos para perceber a ação da rotação comparando os objetos originais com suas imagens pela transformação.

Tarefa 16: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas os círculos visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P**′). Agora, tente mover o centro **O** ou o ângulo α até que o círculo e sua imagem coincidam. Você nota alguma regularidade?

Tarefa 17: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas os triângulos equiláteros visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P′**). Agora, tente mover o centro **O** ou o ângulo α até que o triângulo equilátero e sua imagem coincidam. Você nota alguma regularidade?

Tarefa 18: Nesta construção interativa do GeoGebra, deixe apenas as imagens da logomarca e da sigla SBHMat visíveis (além do ponto **P** e sua imagem **P′**). Agora, tente mover o centro **O** ou o ângulo α até que as duas imagens coincidam. Você nota alguma regularidade?

Tarefa 19: Uma rotação é uma transformação inversível? Em caso afirmativo, qual é a sua transformação inversa?

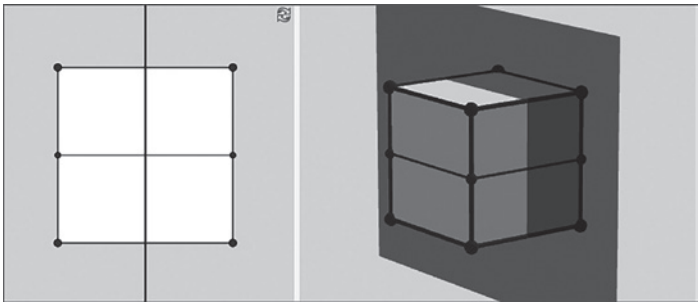
Tarefa 20: A rotação é uma isometria direta ou oposta (isto é, ela preserva ou não preserva orientação)?

Observação: é possível demonstrar (LIMA, 1996, p. 25-2) que, além da transformação identidade, existem apenas quatro tipos diferentes de isometrias no plano, a saber, translação, rotação, reflexão em relação a uma reta e composição de translação com reflexão em relação a uma reta (denominada *reflexão com deslizamento*). Outro resultado que pode ser demonstrado é o seguinte (BARKER; HOWE, 2007, p. 159): toda isometria no plano é a composição de no máximo três reflexões.

Tarefa 21: Dizemos que $\mathbf{P} \in \mathrm{IR}^2$ é um *ponto fixo* de uma transformação $\mathbf{F}$: $\mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$ se $\mathbf{F}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$. Caso existam, quantos e quais são os pontos fixos de uma reflexão com relação a uma reta? E de uma translação? E de uma rotação? Quantos e quais são os pontos fixos da transformação identidade?

Observação: o estudo que fizemos aqui das isometrias no plano pode ser estendido para isometrias no espaço. O leitor interessado nesta teoria poderá consultar Lima (1996) ou Martin (1982). Observamos, contudo, o seguinte: no espaço, as reflexões são agora com referência a um plano e não a uma reta como acontece no plano (Figura 11). Ter isto bem claro em mente ajudará na análise de livros didáticos que faremos mais adiante.

Figura 11 – Reflexão no plano e no espaço:
<http://www.geogebratube.org/student/m430777>



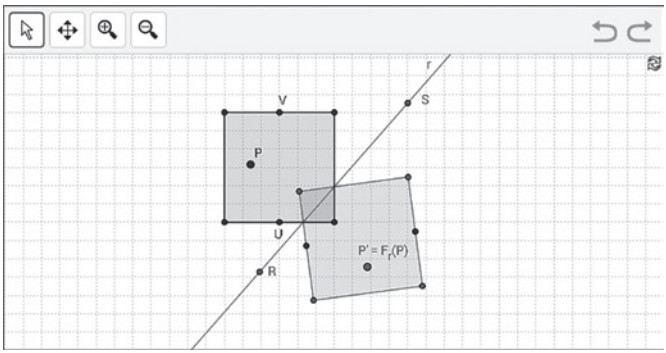
Ainda neste contexto, observamos também que as rotações no espaço são agora em torno de uma reta e não mais em torno de um ponto como acontece no plano.

Entendendo a Condição 2: invariância

Se **X** é subconjunto não vazio do plano, é importante ter em mente que a condição **F**(**X**) = **X** da Definição 1 de simetria não significa que **F** é a função identidade, isto é, que **F**(**P**) = **P** para todo **P** em **X**. A próxima tarefa deverá deixar isto mais claro para você.

Tarefa 22: Acesse a construção interativa do GeoGebra disponível em <http://tube.geogebra.org/student/m430983> (Figura 12). Esta construção implementa a reflexão $\mathbf{F}_r$ no plano em relação à reta *r* definida pelos pontos **R** e **S**. Aqui, **X** é o conjunto formado pelos pontos do quadrado azul e $\mathbf{F}_r(\mathbf{X})$, a imagem de **X** pela transformação $\mathbf{F}_r$, é o quadrado vermelho. Observe que **X** e $\mathbf{F}_r(\mathbf{X})$ são conjuntos diferentes para a posição inicial da reta *r*. Deste modo, a reflexão definida pela reta dada inicialmente **não é** uma simetria de **X** pois, apesar de $\mathbf{F}_r$ ser uma isometria (isto é, apesar de $\mathbf{F}_r$ preservar distâncias), **X** não é invariante por $\mathbf{F}_r$. Vamos escolher uma outra reta cuja reflexão associada será, de fato, uma simetria de **X**. Para isto, na construção interativa, clique e arraste os pontos **R** e **S** de modo que os pontos **U** e **V** coincidam. Note que, agora, os quadrados azul e vermelho coincidem, isto é, $\mathbf{F}_r(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$. Os pontos do quadrado azul **X** foram trocados de lugar (permutados) pela reflexão $\mathbf{F}_r$: os pontos à direita da reta *r* são levados para o lado esquerdo e os do lado esquerdo são levados para o lado direito, sem sobrar ou faltar algum ponto (mova o ponto **P** para perceber esta propriedade).

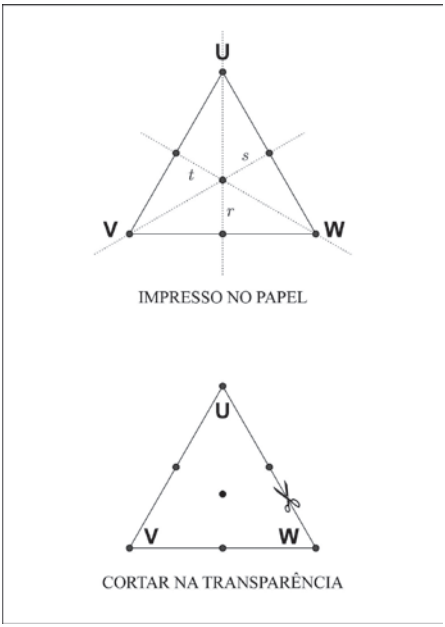
Figura 12 – Invariância $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$: <http://tube.geogebra.org/student/m430983>



3.2 – Simetrias e Teoria de Grupos

O objetivo desta seção é calcular todas as simetrias de um triângulo equilátero. Poderíamos usar o GeoGebra para nos ajudar nesta tarefa mas, no lugar, vamos usar material concreto. Você receberá uma cópia da Figura 13 e alfinetes. A ideia é que o triângulo no papel represente o conjunto **X** e o triângulo na transparência represente sua imagem pela transformação. Para simular uma reflexão com relação a uma reta, basta "virar" o triângulo na transparência sobre o triângulo no papel; para simular uma translação, basta deslizar o triângulo na transparência sobre o triângulo no papel; para simular uma rotação, use o alfinete para fixar o centro da rotação do triângulo na transparência no triângulo no papel para, depois, girá-lo.

Figura 13 – Descobrindo as simetrias de um triângulo equilátero



Para cada simetria que você achar, você deve preencher o quadro abaixo indicando como os vértices **U**, **V** e **W** são permutados por cada simetria. Por exemplo, a transformação identidade leva o vértice **U** no vértice **U**, o vértice **V** no vértice **V** e o vértice **W** no vértice **W**. Indicamos isto escrevendo **UVW → UVW**.

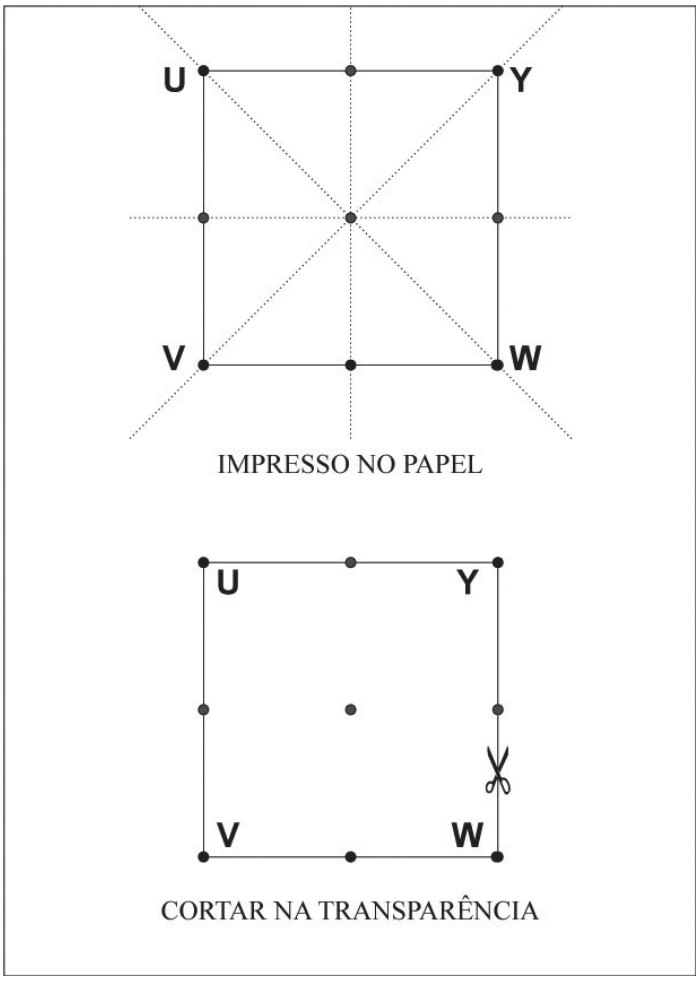
Simetrias de um triângulo equilátero	ANTES		DEPOIS
Identidade	**UVW**	→	**UVW**
	UVW	→	
	UVW	→	
	UVW	→	
	UVW	→	
	UVW	→	

Faça o mesmo exercício mas, agora, para o quadrado da Figura 14. Ao fazê-lo, preencha o quadro abaixo indicando como os vértices **U**, **V**, **W** e **Y** são permutados por cada simetria.

Simetrias de um quadrado	ANTES		DEPOIS
Identidade	**UVWY**	→	**UVWY**
	UVWY	→	
	UVWY	→	
	UVWY	→	
	UVWY	→	
	UVWY	→	
	UVWY	→	
	UVWY	→	

Tarefa 23: Por que, nas Figuras 13 e 14 usadas para a atividade com transparências, é mais conveniente nomear os vértices por **U**, **V**, **W** e **Y** no lugar de **A**, **B**, **C** e **D**?

Figura 14 – Descobrindo as simetrias de um quadrado



Para um triângulo equilátero, você deve ter descoberto seis simetrias (Figuras 15 e 16): **I**, a transformação identidade **I**; $\mathbf{F}_r$, a reflexão com relação a mediana *r*; $\mathbf{F}_s$, a reflexão com relação a mediana *s*; $\mathbf{F}_t$, a reflexão com relação a mediana *t*; $\mathbf{R}_{120^o}$, a rotação em torno do centro **O** no sentido anti-horário por um ângulo de 120º; $\mathbf{R}_{240^o}$, a rotação em torno do centro **O**

no sentido anti-horário por um ângulo de 240º. É possível demonstrar que, de fato, um triângulo equilátero só possui essas seis isometrias (FLORENCIO, 2011).

Tarefa 24: Uma vez que as seis simetrias de um triângulo equilátero são transformações do plano no plano, podemos calcular composições destas simetrias. Como tarefa, você deve calcular e registrar as várias composições no quadro a seguir (denominada *tabela de Cayley*) da seguinte maneira: cada célula deve explicitar a composição da transformação de sua linha com a transformação de sua coluna. Por exemplo, na célula de linha $\mathbf{F}_r$ e coluna $\mathbf{F}_s$ devemos registrar $\mathbf{F}_r \circ \mathbf{F}_s$ (a composição de $\mathbf{F}_r$ com $\mathbf{F}_s$) que, no caso, é $\mathbf{R}_{120^o}$. Dica: o quadro que você preencheu indicando como os vértices **U**, **V** e **W** são permutados por cada simetria pode lhe ajudar muito no cálculo destas composições. Outra possibilidade, equivalente, é usar as Figuras 15 e 16.

	I	$\mathbf{F}_r$	$\mathbf{F}_s$	$\mathbf{F}_t$	$\mathbf{R}_{120^o}$	$\mathbf{R}_{240^o}$
I						
$\mathbf{F}_r$			$\mathbf{R}_{120^o}$			
$\mathbf{F}_s$						
$\mathbf{F}_t$						
$\mathbf{R}_{120^o}$						
$\mathbf{R}_{240^o}$						

Figura 15 – Isometrias de um triângulo equilátero: **I**, $\mathbf{F_r}$ e $\mathbf{F_s}$

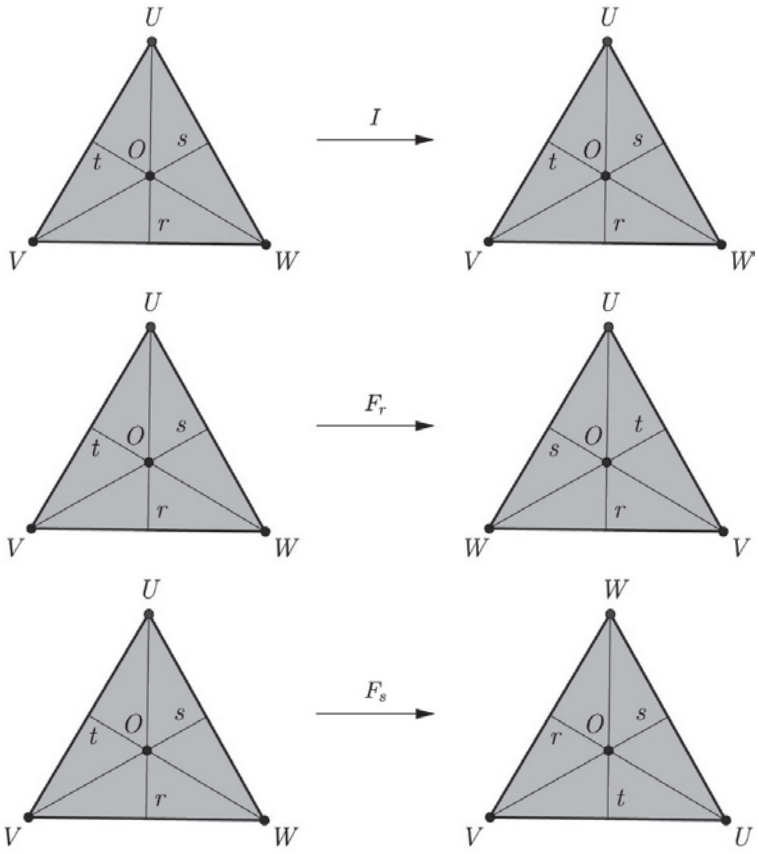
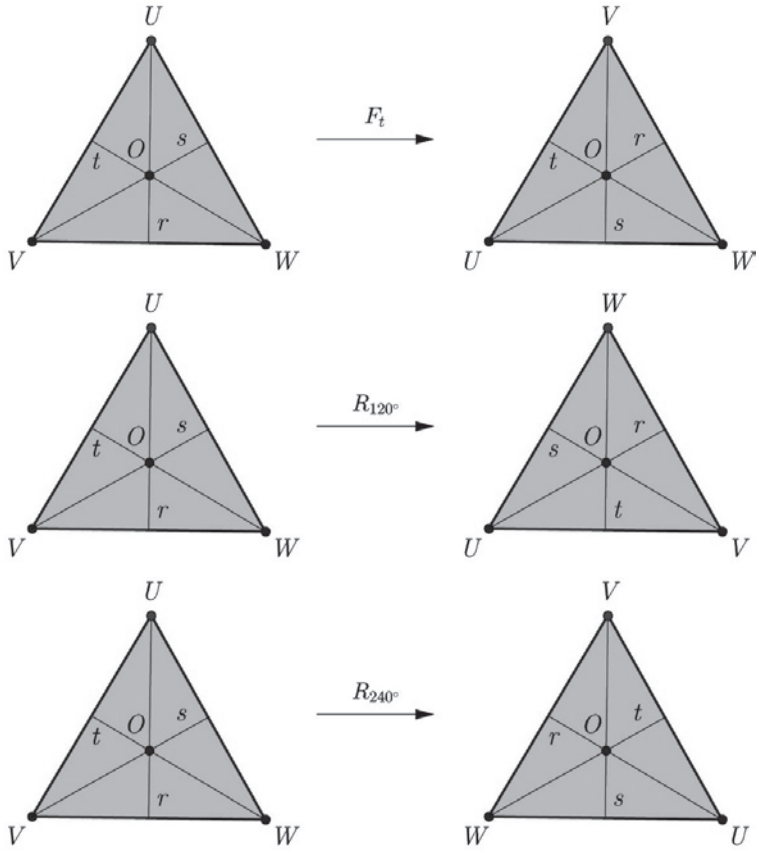


Figura 16 – Isometrias de um triângulo equilátero: $\mathbf{F}_{t'}$ $\mathbf{R}_{120°}$ e $\mathbf{R}_{240°}$



Você deve ter percebido que a composição de quaisquer duas simetrias de um triângulo equilátero é também uma simetria e que para toda simetria **F**, existe uma simetria **G** tal que $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \mathbf{I}$. Como a composição de transformações é associativa e $\mathbf{F} \circ \mathbf{I} = \mathbf{I} \circ \mathbf{F} = \mathbf{F}$ qualquer que seja a transformação **F**, acabamos de perceber que o conjunto $g = \{\mathbf{I}, \mathbf{F}_{r'}, \mathbf{F}_{s'}, \mathbf{F}_{t'}, \mathbf{R}_{120°}, \mathbf{R}_{240°}\}$ munido com a operação de composições de funções satisfaz a definição de *grupo*.

Definição 2. Dizemos que um conjunto g munido de uma operação binária *: $g \, x \, g \rightarrow g$ é um *grupo* se (1) para todo g_1, g_2, g_3 em g, $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ (a operação * é associativa), (2) existe um elemento e em g tal que $e * g = g * e$ para todo g em g (existência do elemento identidade) e (3) para todo g em g existe um elemento h em g tal que $g * h = h * g = e$ (existência do elemento inverso).

A teoria de grupos nasceu com o matemático francês Évariste Galois (1811-832) (Figura 17) que estudou as relações entre equações algébricas e grupos de permutações das raízes (KATZ, 2009, p. 710).

Figura 17 – Retrato de Évariste Galois

Fonte: *Wikimedia Commons*, 1999.

Pode-se demonstrar que o conjunto de simetrias de qualquer subconjunto não vazio munido com a operação de composição será sempre um grupo (BAKER; HOWE, 2007, p. 349). Um fato notável é que propriedades algébricas deste grupo podem ser usadas para estabelecer propriedades geométricas. Nas palavras de Armstrong (1998, p. vii): "Números medem tamanho. Grupos medem simetria.". O leitor interessado em estudar mais sobre este tópico, pode consultar os livros Armstrong (1988), Carter (2009), Martin (1986) e Tapp (2012).

Para você perceber quão poderosa é a ideia de invariância, lembramos aqui o *Erlanger Programm* do matemático alemão Felix Klein (1849-1925) (Figura 18) que propôs uma nova maneira de se abordar o estudo da Geometria de forma unificada e classificatória, a saber, por meio justamente das propriedades de figuras que permanecem invariantes pela ação de um grupo particular de transformações (KATZ, 2009, p. 857). Assim, invariantes geométricos distintos (métricos, afins, projetivos, topológicos, etc.) caracterizam geometrias distintas de modo que, por exemplo, um triângulo equilátero é um invariante da Geometria Euclidiana (pois o fato de um triângulo ser equilátero é invariante por isometrias e homotetias) mas não o é em Geometria Projetiva (pois as transformações projetivas podem distorcer as medidas dos lados do triângulo de forma diferente).

Figura 17 – Retrato de Felix Klein

Fonte: *Wikimedia Commons*, 2005.

Observação. Em nossa pesquisa preliminar, não conseguimos determinar quando e com quem foi publicada pela primeira vez uma definição de simetria em Geometria que tenha feito uso explícito de funções.

Tarefa 25: Os objetos da Figura 18 foram construídos a partir de um triângulo equilátero e de um quadrado por meio de extensões de seus lados. Calcule os grupos de simetria de cada um destes objetos e compare-os com os grupos de simetria do triângulo equilátero e do quadrado.

Figura 18 – Polígonos orientados

Tarefa 26: Dizemos que um subconjunto **X** não vazio do plano IR^2 é um conjunto limitado se existe um número real $r > 0$ tal que **X** está contido no disco de centro na origem (0, 0) e raio r. Verdadeiro ou falso? Se um conjunto **X** é limitado e não vazio, então **X** não possui simetrias que são translações. Argumente.

Tarefa 27: Qual é a diferença, se é que existe, entre isometria e simetria? É correto falar em "isometrias do quadrado"? E "simetrias do quadrado"?

Observação. Isometrias (transformações que preservam distâncias) fornecem um modelo para o conceito de congruência em Geometria: duas figuras **P** e **Q** são congruentes se existe uma isometria tal que **F**(**P**) = **Q**.

Terminamos esta seção relembrando os três elementos-chave associados à definição de simetria como considerada atualmente: o conceito de função (transformação), o conceito de isometria e o conceito de invariância.

4

Legendre e o conceito moderno de simetria

Hon e Goldstein (2008) advogam que o uso científico do termo "simetria" no sentido moderno ocorreu com o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Neste capítulo apresentaremos um pouco de sua vida, alguns marcos de sua atuação na Matemática e, com mais detalhes, o contexto no qual Legendre criou o revolucionário conceito associado à palavra "simetria".

4.1 – Vida e atuação de Legendre na Matemática

Adrien-Marie Legendre nasceu em 18 de setembro de 1752 em Paris, mas há indícios que tenha nascido em Toulosse e, ainda muito jovem, mudou-se para Paris na França. Estudou Matemática e Física no *Collège Mazarin* em Paris, onde defendeu sua tese nestas áreas. De 1775 a 1780, trabalhou junto com Laplace ao lecionar na *École Militeire* de Paris.

Legendre foi membro do comitê da *Académie des Sciences* em 1791. Sua vida e parte de seu trabalho culminaram com a época da Revolução Francesa. Em 1803, Napoleão reorganizou a Academia e criou um Departamento de Geometria e Legendre foi escolhido para ocupar um cargo. Mais tarde, por se recusar a apoiar o candidato ao governo da época, teve seu salário suprimido e um final triste, pois morreu muito pobre em 10 de janeiro 1833 em Paris (ITARD, 1973).

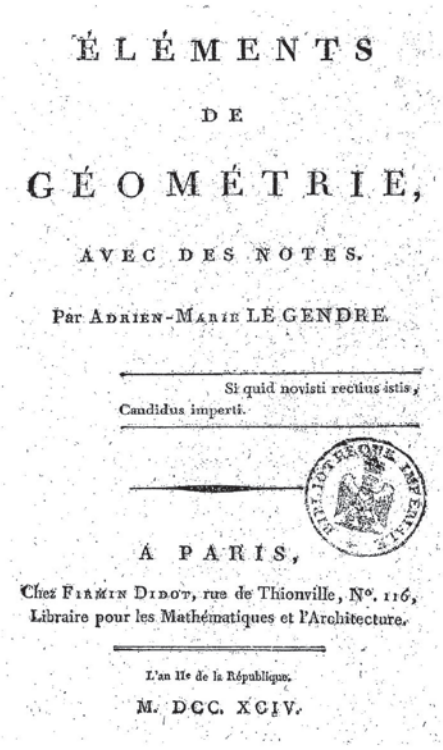
O interesse de Legendre foi principalmente por três domínios da Matemática: Teoria de Números, Funções Elípticas e Geometria Elementar. Porém, sendo um algebrista por temperamento, ele mostrou grande interesse por Geometria,

assumindo o desafio de introduzir *Os Elementos* de Euclides para estudantes e o público em geral (HON; GOLDSTEIN, 2008).

Ao longo de sua vida, Legendre contribuiu para a Matemática e para outras áreas (como a Física) com muitas outras obras. Em particular, ele publicou em Mecânica Celeste com o trabalho *Recherches sur La Figura des Planètes* em 1784 (que contém os conhecidos polinômios de Legendre); em Teoria dos Números com *Recherches d'Analisar Indéterminée* em 1785; e em Teoria das Funções Elípticas com artigos sobre integrações por arcos elípticos em 1786. Outro trabalho seu de grande importância foi *Essai sur la Théorie des Nombres* (1797-1798), onde Legendre desenvolveu o método dos mínimos quadrados, uma obra posteriormente reescrita em 1808.

Foi em 1794 que Legendre publicou sua obra *Éléments de Géométrie* (Elementos de Geometria). Segundo Valente (2007, p. 101), o livro *Éléments de Géométrie* representa o único manual didático que Legendre produziu e sua obra responde menos à necessidade de um cuidado didático com a Geometria do que a uma reflexão matemática para a qual o autor se volta o resto de sua vida.

Figura 19 – Recorte da página de rosto do livro
Éléments de Géométrie de Legendre



ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE,

AVEC DES NOTES.

Par ADRIEN-MARIE LEGENDRE.

Si quid novisti rectius istis,
Candidus imperti.

BIBLIOTHEQUE IMPERIALE

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, rue de Thionville, N°. 116,
Libraire pour les Mathématiques et l'Architecture.

L'an IIe de la République.

M. DCC. XCIV.

Fonte: Gallica Bibliothèque Numérique, 2014.

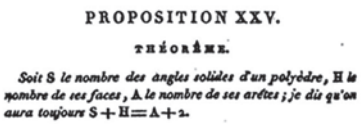
Eléments de Géométrie dominou, desde a sua publicação, a instrução elementar em Geometria por quase um século. Em sua obra, Legendre reorganizou e simplificou muitas das demonstrações que existiam em *Os Elementos* de Euclides. Seu trabalho veio a substituir a obra de Euclides como livro texto na maioria da Europa, nos Estados Unidos e foi usado por muitos anos no ensino de Geometria nas escolas militares do Brasil (HON; GOLDSTEIN, 2008; VALENTE, 2007).

A tradução de sua obra para o Português foi feita por Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, que foi aluno e lente da *Academia Real Militar da Marinha* de Lisboa e professor na *Academia Real dos Guardas-Militar* do Brasil. A edição impressa em 1809 no Rio de Janeiro representa um dos primeiros livros gravados na Imprensa Régia (Valente, 2007, p.102). Uma nova edição desta tradução foi organizada e adaptada em 2009 pelo professor Luiz Carlos Guimarães (LEGENDRE, 2009). Embora a obra de Legendre tenha sido uma espécie de interferência acadêmica no ensino da Geometria Elementar, "O texto de Legendre na França e também no Brasil significou mais uma obra de referência para a Geometria que propriamente um livro a ser utilizado pelos alunos" (VALENTE, 2007, p. 122).

Na exposição sobre corpos sólidos, Legendre adotou o termo francês *aretê* para a *aresta* de um poliedro: "A intersecção comum de duas faces adjacentes de um poliedro é chamada de lado [*côte*] ou aresta [*aretê*] do poliedro (Legendre [1794] 1817, 161, Book VI, def. 2): "*L'intersection commune de deux faces adjacentes d'un polyhedre s'appelle` cotˆ e´ ou aretˆe du polyhedre*". E usando esse novo termo, Legendre reformulou a fórmula de Euler (a qual apresentamos extraída dos *Éléments de Géométrie* na Figura 20) e incluiu uma prova desse resultado, que de acordo com o renomado matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941) é "a primeira prova rigorosa para isto" (HON; GOLDSTEIN, 2008, p. 224, tradução nossa).

Em seu livro, Legendre apresentou ainda uma prova simples para mostrar que π e π^2 são números irracionais, além de conjecturar que π não é a raiz de qualquer equação algébrica de grau finito com coeficientes racionais (ITARD, 1973).

Figura 20 – Enunciado da Fórmula de Euler no livro *Éléments de Géométrie* de Legendre



PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Soit S le nombre des angles solides d'un polyèdre, H le nombre de ses faces, A le nombre de ses arêtes ; je dis qu'on aura toujours S + H = A + 2.

Fonte: Gallica Bibliothèque Numérique, 2014.

Lembramos que *Os Elementos* de Euclides foi a obra mais referenciada e usada como manual para o ensino (é o segundo livro mais editado no mundo, perdendo apenas para a Bíblia). Não somente pelo conteúdo matemático que contém, mas, também, pela forma e estilo que traz o método lógico axiomático no qual a Matemática se apresenta. Entretanto, alguns matemáticos sustentavam a tese de que a obra carecia de "reformulação". Legendre foi um deles, além de outros grandes nomes, que colocaram sua atenção ao mesmo propósito, o de "reformular" *Os Elementos* de Euclides. Sylvestre François Lacroix (1765-1843), Alexis Claude Clairaut (1713-1765), Robert Potts (1805–1885) e Alexander Ingram (de Leith) são exemplos de matemáticos que publicaram suas versões de *Os Elementos* seguindo esta linha.

Legendre, em particular, deixa evidente e com suas próprias palavras quais foram suas motivações para tal trabalho. Explicitamos a seguir essas motivações extraídas do "Prefácio" da Primeira Edição Francesa, traduzida por Luiz Carlos Guimarães:

> Criticam-se os Elementos de Geometria o serem pouco rigorosos. Muitas dessas obras podem apresentar qualidades particulares e desempenhar bastante bem o objetivo para o qual foram compostas, mas não existe nenhuma que haja conseguido demonstrar todas as proposições de maneira completamente satisfatória. Ora os autores supõem coisas que não estão contidas nas definições; ora as

> definições mesmas são defeituosas; algumas vezes eles se contentam em invocar o testemunho dos olhos; outras vezes empregam princípios, verdadeiros em si mesmos, mas que parecem conter negligências que deixam o espírito insatisfeito. Em geral é muito difícil tornar rigorosos os Elementos, não apenas na Geometria, mas em todas as ciências: as proposições mais simples são as que causam mais embaraços e as que se demonstram com menor sucesso.
>
> [...] Ocupado pelo ensino das ciências, desde muito eu tive ocasião de observar as imperfeições encontradas em algumas das obras elementares mais conhecidas; pouco a pouco, reuni materiais para o aperfeiçoamento desses Elementos; enfim me decidi a organizar estes materiais e o resultado é a obra que ofereço ao público neste momento. Pelo que já foi dito, deve-se depreender que meu objetivo é tornar mais rigorosos os Elementos. (LEGENDRE, 2009, p. iv)

Na sequência do prefácio, Legendre apresenta o modo como o seu trabalho será dividido, seguindo uma estrutura análoga a de *Os Elementos.* Ele também inclui um conjunto de notas explicativas, como ele comenta.

> As Notas adicionadas ao final desta obra têm diferentes objetivos; algumas dão conta do que possa haver de novo em alguns pontos do texto; outras apresentam demonstrações novas, pesquisas ou discussões relativas ao aperfeiçoamento dos Elementos. Estas Notas são uma espécie de distração que me permiti enquanto compunha esta obra; elas não fazem parte dos Elementos de Geometria e os leitores que não tiverem conhecimento suficiente de cálculo para as acompanhar poderão ignorá-las sem inconveniente. (LEGENDRE, 2009, p. vi)

Legendre reconhece e faz menção sobre o caráter inovador de seu *Éléments de Géométrie* e deixa explícito que precisará incluir definições novas para ser mais preciso:

> Nota I: Acerca de alguns nomes e definições. Introduzimos nessa obra algumas expressões e definições novas que servem para dar à linguagem geométrica mais exatidão e clareza. Daremos conta dessas mudanças e proporemos outras que poderiam atender mais completamente os mesmos objetivos. (LEGENDRE, 1794, p. 287)

Dentre os quatro livros dos *Éleménts de Géométrie* que tratam de geometria sólida, está o Livro VI que aborda poliedros e sua medida. Segundo Legendre, neste livro, faz-se uma abordagem inteiramente nova, quando comparado a *Os Elementos* de Euclides. Nas palavras do autor, "O Livro VI trata dos Poliedros e de sua medida. Este livro parecerá bastante distinto daquilo que é contido em outros Elementos; acreditamos que devíamos apresentá-lo de forma inteiramente nova." (LEGENDRE, 2009, p. vi).

Segundo Hon e Goldstein (2008), podemos nos levar a especular que o interesse de Legendre a essa teoria de corpos sólidos tenha sido estimulado por razões teóricas e práticas, como a fórmula de Euler, a inadequação das definições para a geometria sólida ou mesmo a arquitetura militar, fortificação e engenharia. Entretanto, um fragmento do texto de Legendre revela:

> Tais são as demonstrações pelas quais muitos autores pretendem provar a igualdade dos triângulos esféricos, nos mesmos casos e da mesma maneira que a dos triângulos retilíneos. Disso vemos um exemplo evidente quando Roberto Simson, atacando a demonstração da proposição 28, Livro XI, de Euclides, cai também no inconveniente de fundar a sua demonstração em uma coincidência que não existe. (LEGENDRE, 2009, p. 288)

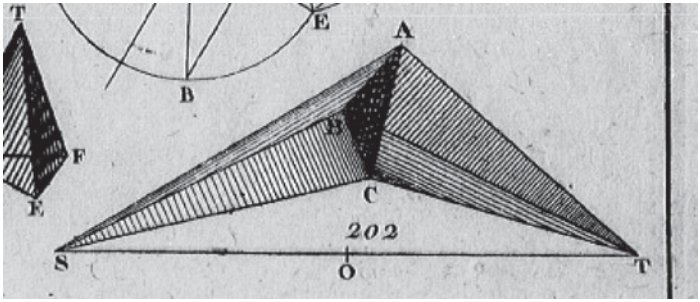
E foi esse o ponto de partida para que Legendre desenvolvesse a sua teoria – a crítica de Robert Simson (1687-1768) a *Os Elementos* de Euclides. Em síntese, foram as definições 9 e 10 que definem figuras sólidas semelhantes e figuras sólidas iguais e semelhantes, o alvo das críticas, as quais apresentamos a seguir:

> 9. Figuras sólidas semelhantes são as contidas por planos semelhantes iguais em quantidade.
>
> 10. E figuras sólidas iguais e semelhantes são as contidas por planos semelhantes em quantidade e em magnitude (EUCLIDES, 2009, p. 481-482).

Simson coloca que a igualdade de figuras sólidas é algo que deveria ser demonstrado, pelo método de superposição, ou de alguma outra forma e, assim, a definição 10, euclidiana, não poderia ser uma definição, mas um teorema (HEATH, 1956, p. 265). Para ilustrar que, de fato, a definição não é verdadeira, Simson dá um contraexemplo. Legendre também dá um contraexemplo para a definição 10, mais simples se comparado ao de Simson. A seguinte tarefa tem a intenção de trabalharmos com esse contraexemplo.

Tarefa 1: A Figura 21 foi extraída dos *Éléments de Géométrie* de Legendre e apresenta dois tetraedros *ABCS* e *ABCT* justapostos pela face *ABC*. Verifique se estes poliedros formam, de fato, um contraexemplo para a definição de Euclides: (a) Existe uma correspondência entre os tetraedros que preserva as medidas das arestas e ângulos sólidos? (b) É possível sobrepor um sobre o outro? Se preferir, fotocopie a Figura 22 (amplie-a se necessário), corte as planificações e monte os poliedros para ajudar na visualização (cole usando as abas da figura).

Figura 21 – Figura 202 dos *Éléments de Géométrie* de Legendre



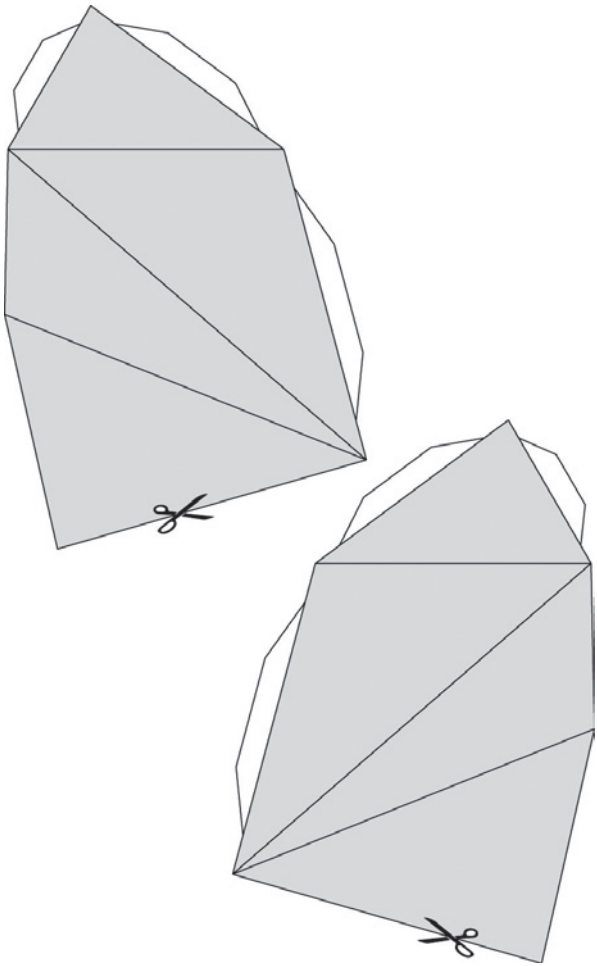
Fonte: Gallica Bibliothèque Numérique, 2014.

Simson atacou o problema da definição 10 publicando uma nova edição de *Os Elementos* (SIMSON, 1756). Entretanto, sua "restauração" foi construída em analogia com a geometria plana, não avançando além da abordagem tradicional de Euclides (HON; GOLDSTEIN, 2008, p. 232).

Legendre foi além. Ao contrário de Simson, evitou tornar-se uma "vítima" da terminologia euclidiana e dá um passo à frente criando definições e conceitos novos. Foram essas as palavras de Jean-Frédéric-Théodore Maurice (1775-1851) no obituário dedicado a Legendre citadas em Hon e Goldstein (2008, p. 223):

> Embora a famosa Geometria [de Legendre] seja completamente elementar, temos que dedicar algumas palavras a este trabalho uma vez que o autor encontrou os meios para ser original em um assunto tão repetidamente tratado [*rebattu*] durante 20 séculos. Ele considerou pela primeira vez a igualdade por simetria [*l'égalité par symétrie*] de áreas curvas [de polígonos esféricos] e volumes (MAURICE apud HON; GOLDSTEIN, 2008, p. 223, grifo nosso).

Figura 22 – Planificações dos dois tetraedros da Figura 202
dos Éléments de Géométrie de Legendre



Tarefa 2: A Figura 22 apresenta a planificação dos dois poliedros indicados por Legendre. De fato, bastaria apresentar apenas uma planificação e fazer duas cópias. Por quê?

4.2 – O conceito moderno de simetria

Para que Legendre pudesse dar uma caracterização adequada aos poliedros foi essencial avaliar as propriedades dos ângulos sólidos, para isso seus esforços são apresentados nos Livros V (*a Les Planeja et let Ângulos Solides*) e VI (*Les Polyedres*). No Livro V, ele introduz *simetria* em geometria sólida:

> Proposição XXII. Se dois ângulos sólidos ∠S e ∠T são compostos de três ângulos planos iguais cada um a cada um, os planos nos quais os ângulos são iguais estarão igualmente inclinados entre si.
>
> Escólio. Se dois ângulos sólidos forem compostos de três ângulos planos iguais, cada um a cada um, e ao mesmo tempo os ângulos iguais ou homólogos estiverem dispostos da mesma maneira nos dois ângulos sólidos, então estes ângulos serão iguais e, postos um sobre o outro, irão coincidir.
>
> [...] Essa coincidência contudo não tem lugar senão supondo que os ângulos planos iguais estão *dispostos da mesma maneira nos dois ângulos sólidos*. Porque, se os ângulos planos iguais estiverem dispostos em ordem inversa, . . . então, seria impossível fazer coincidir os dois ângulos sólidos um com o outro. Esta sorte de igualdade, que não é absoluta ou de sobreposição, merece ser distinguida por uma denominação particular: nós a chamaremos *igualdade por simetria*. Assim, os dois ângulos sólidos de que se trata que são formados por três ângulos planos iguais, cada um a cada um, mas dispostos em ordem inversa, se chamarão *ângulos iguais por simetria* ou simplesmente *ângulos simétricos* (LEGENDRE, 1794, p. 173-174).

A definição de Legendre para simetria não tem precedentes: *simetria* tornou-se uma relação entre dois sólidos in-

dependentemente de suas posições no espaço. Proporções das partes com relação ao todo não aparecem nesta definição. Com esta definição, Legendre introduz o conceito de s*imetria* que se tornou uma relação entre corpos sólidos independentes das posições que ocupam no espaço. Com o conceito moderno de *simetria,* resultados que dependem da coincidência de figuras sólidas podem ser demonstrados e, sem o novo conceito, as provas destes resultados não seriam possíveis (HON; GOLDSTEIN, 2008, p. 260).

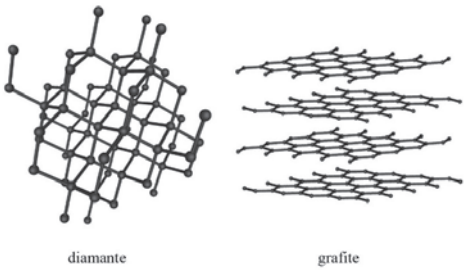
Conclusivamente podemos considerar que, pela primeira vez, simetria – agora como um conceito bem definido – tornou-se um poderoso conceito no domínio das ciências.

A obra de Legendre com o moderno conceito de simetria teve impacto extraordinário durante um longo período, entre 1794 e 1813 dez edições dos *Éléments de Géométrie* foram publicadas. Sua obra foi referenciada por ilustres matemáticos e editores de outras obras de Geometria, que tiveram o cuidado de incluir notas referenciando Legendre ao utilizarem suas contribuições à geometria sólida em textos franceses. Sua definição foi tão bem aceita que, segundo Hon e Goldstein (2008, p. 253), alguns matemáticos referenciavam Legendre ao usar tal conceito, a exemplo de Sylvestre François Lacroix (1765-1843) e Jean-Guillaume Garnier (1766-1840).

Fora da Matemática, em Química, Hon e Goldstein (2008, p. 301) apontam que o primeiro uso do conceito moderno de simetria de que eles têm conhecimento se deu com André-Marie Ampère (1775-1836), que reconheceu e deu os créditos a Legendre. Ampère procurava explicar fenômenos químicos por meio da disposição de átomos e moléculas. Um exemplo clássico neste contexto são as formas alotrópicas do carbono: tanto o diamante, quanto a grafite são compostas de carbono. O que diferencia e caracteriza as propriedades químicas (e o preço) destes elementos químicos é o arranjo geométrico de suas moléculas (Figura 23), o qual pode ser estudo por meio de simetrias.

Observação importante. Você pode estar se perguntando por que não incluímos ainda um retrato de Legendre. O único disponível atualmente é uma caricatura feita pelo francês Julien-Leopold Boilly (1796-1874) em 1820 (Figura 24 (A)). Aliás, aqui cabe um alerta muito importante: vários textos, incluindo livros de História da Matemática, reproduzem a Figura 24 (B) como um retrato de Adrien-Marie Legendre. Isto está equivocado, como aponta Duren (2009): o retrato da Figura 24 (B) é, de fato, de Louis Legendre (ca. 1755-1797), um açougueiro de Paris que participou ativamente da Revolução Francesa tornando-se, depois, deputado da Convenção Nacional.

Figura 23 – Diamante e grafite: duas formas alotrópicas do carbono



Fonte: *Wikimedia Commons*, 2010.

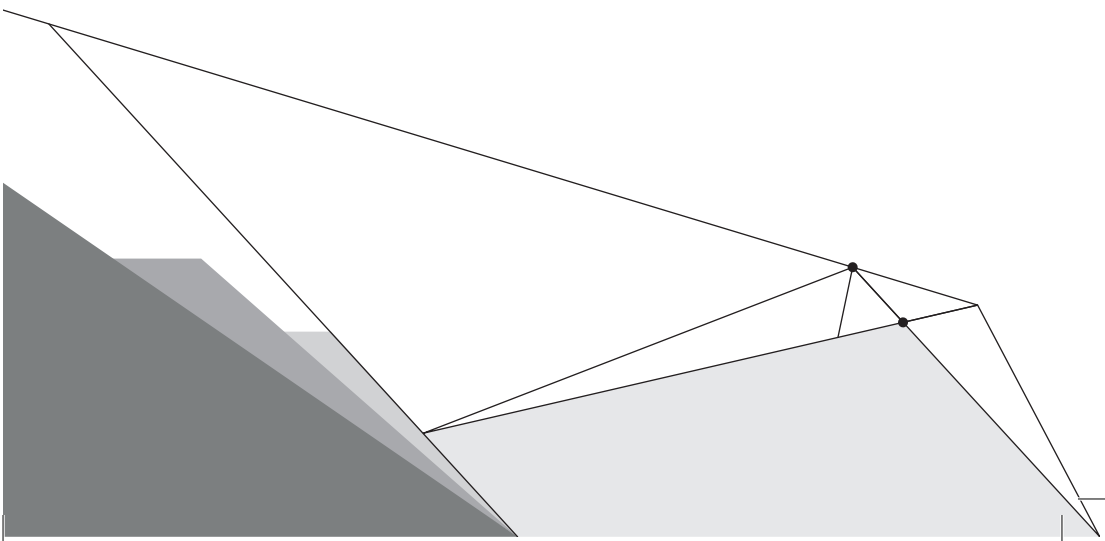
Figura 24 – Dois Legendre diferentes

(A) Adrien-Marie Legendre (B) Louis Legendre

Fonte: *Wikimedia Commons*, 2010.

5

O conceito antigo de simetria: proporcionalidade



Segundo Hon e Goldstein (2008), na Antiguidade, a palavra simetria foi usada com um único significado: *proporcionalidade*. Dois contextos principais moldam o seu uso: no contexto matemático, ela significava comensurabilidade (como faziam uso Platão, Aristóteles, Euclides e Arquimedes) e, no contexto avaliativo (por exemplo, na apreciação da beleza), ela significava "bem proporcional" ou "equilibrada" (como faziam uso, por exemplo, Ptolomeu no Almagesto e Vitruvius em sua teoria da arquitetura). Neste capítulo apresentaremos, de forma bem sucinta, algumas passagens de destaque deste enredo histórico.

5.1 – Simetria, arquitetura e Vitruvius

Marcus Vitruvius Pollio (c. 80-70 a.C.- c. 15 a.C.) foi um arquiteto e engenheiro romano, conhecido pelo seu tratado de arquitetura em 10 volumes, *De Architectura Libri Decem*, *Os Dez Livros sobre Arquitetura*. Vitruvius foi o primeiro (como ele próprio reconhece), até a sua época, a cobrir todo o corpo da arquitetura de forma sistemática (KRUFT, 1996, p. 21), em semelhança a que Euclides fez com a Geometria.

Vitruvius, no Livro I de seu tratado, define *simetria* da seguinte forma:

> Simetria é a composição apropriada dos elementos da construção e a relação entre as diferentes partes e o esquema geral como um tudo, de acordo com uma certa parte escolhida como padrão. Do mesmo modo que no corpo humano existe uma harmonia simétrica entre o an-

> tebraço, o pé, a palma, o dedo e outras unidades menores, o mesmo deve acontecer com as construções perfeitas da arquitetura. (VITRUVIUS, 1914, p. 14, tradução nossa).

No Livro III, ele afirma que os princípios da simetria se referem a uma proporção adequada e, então, explica o que ele entende por proporção:

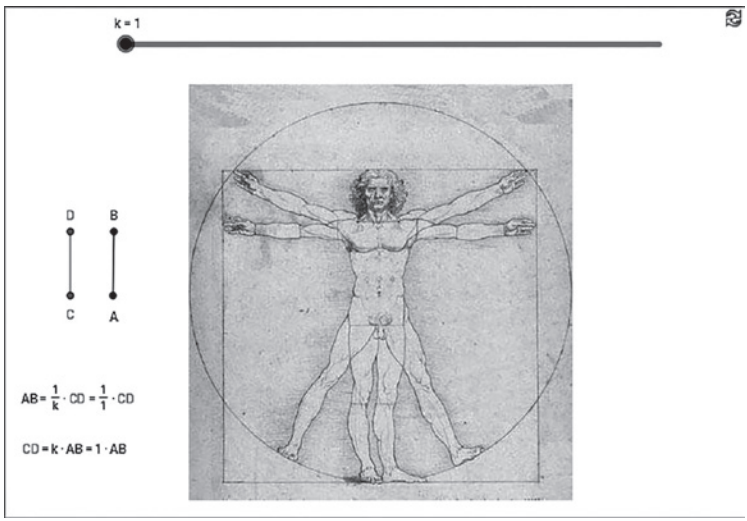
> A construção de um edifício depende da simetria, cujos princípios devem ser observados cuidadosamente pelo arquiteto. Eles devem estar na proporção adequada, em Grego ἀνάλογία. Proporção é uma correspondência entre as medidas das partes do trabalho inteiro e do todo com uma certa parte escolhida como padrão. A partir disto resultam os princípios de simetria. Sem simetria e proporção não podem existir princípios na construção de qualquer edifício, isto é, não existe uma relação precisa entre suas partes como no caso de um homem em boa forma. (VITRUVIUS, 1914, p. 72, tradução nossa).

Como podemos perceber, ao contrário da definição moderna de simetria que trata do objeto em si, isto é, de como suas partes estão dispostas de forma a serem invariantes por determinadas transformações, na acepção de Vitruvius, simetria se refere à proporção entre as partes com o todo. Desta maneira, o significado dado por Vitruvius à palavra simetria é bem diferente do significado que a palavra tem atualmente. Note também como Vitruvius usa o corpo humano como um modelo para orientar princípios arquitetônicos.

Tarefa 1: Você sabia que a famosa imagem (Figura 25) nada mais é do que o desenho de Leonardo da Vinci (1452-1519) representando as proporções sugeridas por Vitruvius em seu tratado de arquitetura?

Usando a construção interativa do GeoGebra disponível em <https://www.geogebratube.org/student/m433299>, tente descobrir a razão k = CD/AB nos casos considerados por Vitruvius e, em seguida, preencha o quadro mais a seguir. Mais especificamente, posicione o segmento CD (clique e arraste os pontos C e D) no lugar indicado na coluna "CD" da tabela. Em seguida, posicione o segmento AB próximo ao lugar indicado na coluna "AB", na mesma linha da tabela (clique e arraste o ponto A primeiro e, depois, ajuste a posição do ponto B). Mude o valor de k (clique e arraste a bolinha preta do seletor), fazendo ajustes finos nas posições dos segmentos, caso seja necessário. **Observação importante:** na obra de Vitruvius, o valor da razão k é sempre um número inteiro e o número de ouro não aparece!

Figura 25 – Desenho de Leonardo da Vinci seguindo as orientações de Vitruvius no GeoGebra: <https://www.geogebratube.org/student/m433299>



CD	AB	k = CD/AB
Altura	Comprimento dos braços estendidos	
Altura	Distância entre a raiz do cabelo e a linha do queixo	
Altura	Largura máxima dos ombros	
Altura	Distância do topo da cabeça para a linha inferior do queixo	
Altura	Distância do topo da cabeça para a linha dos mamilos	
Altura	Distância do cotovelo para a axila	
Altura	Distância do cotovelo para a ponta da mão	
Altura da cabeça	Distância da linha do queixo para o nariz	
Altura	Comprimento da mão	
Altura da face	Distância da raiz do cabelo para a linha das sobrancelhas	
Altura	Distância do topo da cabeça até a linha inferior do pescoço	

A evolução do uso do termo simetria em arquitetura está bem descrita no artigo de Hon e Goldstein (2005). Nesta história, além de Vitruvius, constam os nomes de Leon Battista Alberti (1404-1472), Sebastiano Serlio (1475-1554) e Claude Perrault (1613–1688). A participação de Perrault, um acadê-

mico francês eminente, é peculiar: ao traduzir o tratado de Vitruvius para o Francês, ele não traduz a palavra "simmetria" como "simetria", alegando que, em Francês, "simetria" tem outro significado (a igualdade e paridade entre partes opostas). Perrault traduz "simmetria" por "proporção".

Tarefa 2: Na sua opinião, o desenho do "Homem Vitruviano" (Figura 23) é "simétrico"? Justifique sua resposta!

5.2 – Comensurabilidade e Euclides

A primeira definição do Livro X de *Os Elementos* de Euclides, em grego, é a seguinte: "Σύμμετρα (*summetra*) μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα (*assumetra*) δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι." (HEIBERG, I. L.; MENGE, 1883, p. 3, inserções nossas). Na tradução de Bicudo (EUCLIDES, 2009, p. 353), encontramos: "magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se". Hon e Goldstein (2008, p. 71) observam que a palavra "simetria" é a palavra de origem latina mais etimologicamente próxima da palavra original "summetra" em grego. Conclusão: o significado dado a palavra "simetria" por Euclides é o que hoje conhecemos como comensurável. Com a terminologia matemática atual, dizer que duas magnitudes são comensuráveis significa dizer que a razão entre elas pode ser expressa por um número racional. Mais precisamente, no contexto de medidas:

Definição 1. (Conforme Lima *et al*. (2003))

(a) Se um segmento $u = CD$ é tomado como unidade, sua medida é, por definição, igual a 1.

(b) Segmentos congruentes, por definição, possuem a mesma medida.

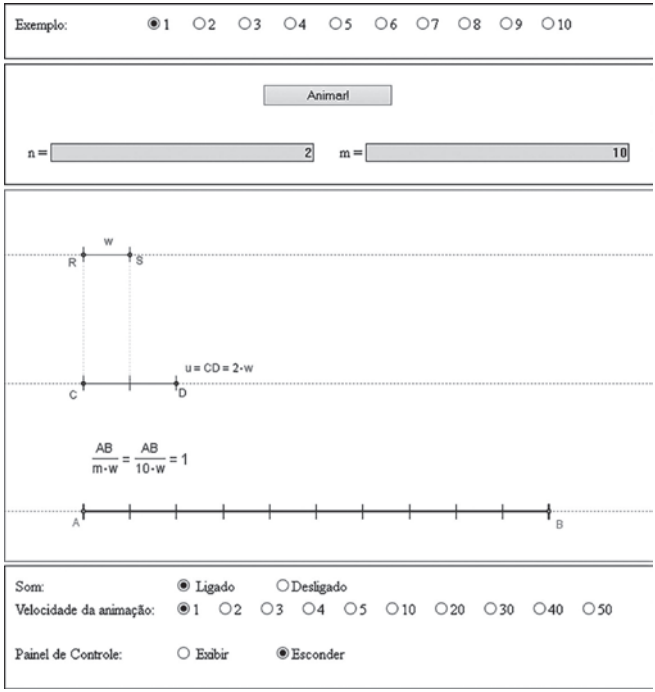
(c) Dado um segmento AB, se n pontos interiores decompuserem AB em n segmentos justapostos, então a medida de AB será igual à soma das medidas desses n segmentos. Se estes segmentos parciais foram todos congruentes a u, então diremos que *u cabe n* vezes em AB e a medida de AB será, por definição, igual a n.

(d) Diremos que dois segmentos AB e CD são *comensuráveis* se existe um segmento $w = RS$ que cabe n vezes em CD e m vezes em AB. Nesse caso, w será então uma *medida comum* de CD e AB. Observe que, nesse caso $AB/CD = (m\,w)/(n\,w) = m/n$ é um número racional, uma vez que m e n são números inteiros, com n diferente de zero.

Assim, o uso matemático do equivalente em grego da palavra "simetria" não tem relação com o conceito de invariância dado à palavra nos dias de hoje.

Tarefa 3: Para entender um pouco mais a definição de segmentos comensuráveis e incomensuráveis, acesse o jogo (Figura 26) feito com o GeoGebra em: <http://www.professo res.uff.br/hjbortol/arquivo/2015.1/xi-snhm/>. O campo de entrada "n" controla em quantos segmentos de mesmo tamanho $w = RS$ o segmento CD será dividido. O campo de entrada "m", por sua vez, controla quantos segmentos w serão justapostos a partir do ponto A sobre o segmento AB. Se os segmentos AB e CD forem comensuráveis, você conseguirá encontrar os valores de "n" e "m". Importante: como este jogo foi programado com a versão em Java do GeoGebra, você precisará configurar seu navegador para dar permissão de acesso. Instruções encontram-se na página do jogo.

Figura 26 – Segmentos comensuráveis e incomensuráveis no GeoGebra:
< http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2015.1/xi-snhm/>



Observação

Apesar da evidente conexão da palavra "simetria" como "comensurabilidade", existem livros no Brasil que afirmam (de forma equivocada) que "comensurável", "proporção" e "medida" são traduções erradas para a palavra "simetria".

6

Simetria na Educação Básica

O ponto de partida (e nunca de chegada) de qualquer prática pedagógica para o professor de Matemática são as orientações curriculares nas quais o nível de ensino e a escola que ele trabalha se submetem. Em nível de Brasil, o documento oficial que direciona a ação pedagógica dos profissionais da educação são os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Embora os PCN sinalizem conteúdos e práticas para a Educação Básica, não possuem caráter de obrigatoriedade e, portanto, os conteúdos podem ser adaptados às necessidades locais de cada região do país. Para isso, o documento elenca os conteúdos de Matemática para a disciplina de Matemática para o Ensino Fundamental (1º ao 9º Ano) em quatro blocos, quais sejam: (1) Números e Operações, (2) Espaço e Forma, (3) Grandezas e Medidas e (4) Tratamento da Informação. Com a intenção de observarmos o modo como o conceito de simetria está contemplado nos PCN, apresentaremos o resultado de nossos estudos a partir dessa divisão.

6.1 – O conceito de simetria nos PCN

Primeiro e Segundo Ciclos

Concentrando-se nos primeiros ciclos, encontramos o conceito de *simetria* presente a partir do Segundo Ciclo do Ensino Fundamental, como um instrumento para identificar, reconhecer e descrever formas geométricas, ou seja:

> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve levar o aluno a:
> [...] Identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por

> meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções.
>
> [...] Identificação da simetria em figuras tridimensionais.
>
> [...] Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc. (BRASIL, 1997, p. 55-56, grifos nossos)

Nesta etapa da educação, existe uma preocupação para que o aluno identifique formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, para que, assim, perceba semelhanças e diferenças entre elas, nas diferentes formas em que o aluno possa ter contato no seu dia a dia e, com isso, ele poderá reconhecer alguns elementos que a compõe, como faces, arestas, vértices, lados e ângulos (BRASIL, 1997, p. 64).

Terceiro e Quarto Ciclos

No Terceiro Ciclo, *simetrias* não fazem parte dos objetivos. Entretanto, quando nos atentamos para os conceitos e procedimentos que devem ser ensinados durante o decorrer do Terceiro e do Quarto Ciclo do Ensino Fundamental, os PCN referem-se às transformações de uma figura que deixam medidas invariantes, ou sejam, as isometrias:

> Construindo figuras a partir da reflexão, por translação por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias). (BRASIL, 1998, p. 86, grifos nossos)

E ainda,

> O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas (BRASIL, 1998, p. 124, grifos nossos).

Os PCN fazem uma breve menção para um aspecto histórico de simetria em Geometria:

> O estudo de temas geométricos possibilita ainda a exploração de interessantes aspectos históricos. Como sabemos, a Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, que se desenvolveu em função de necessidades humanas. As civilizações da época pré-histórica utilizavam regras para medir comprimentos, superfícies e volumes. Seus desenhos continham figuras geométricas em que a simetria era uma das características predominantes. (BRASIL, 1998, p. 127, grifo nosso)

Ensino Médio

O Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica. Segundo os PCN, nesta etapa de ensino o aprendizado deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. "O currículo do Ensino Médio deve buscar a integração dos conhecimentos, especialmente pelo trabalho interdisciplinar" (BRASIL, 2006, p. 91).

Nesse contexto, os PCN apresentam os "Temas Complementares" que trazem algumas ideias que devem ser adaptadas segundo a realidade de cada contexto escolar. Relacionadas ao nosso trabalho, encontramos as seguintes orientações:

> No estudo da geometria, também se podem provocar os alunos com a pergunta: 'Como funcionam certos mecanismos do nosso quotidiano ou certos instrumentos de trabalho?'.
>
> [...] Também perguntas simples, como 'Por que o parafuso é sextavado?' ou 'Por que os prismas triangulares, junto com o movimento de rotação, são usados para veicular propagandas?', são respondidas com conhecimento bastante elementar de geometria, que também possibilita inúmeras atividades de natureza interdisciplinar: os poliedros e os cristais, as simetrias nos seres vivos, a concha de Nautilus e a espiral de Arquimedes.
>
> [...] Na direção de valorização da Matemática, no seu aspecto estético, existem alguns vídeos que podem servir como ponto de partida de discussão de assuntos tais como simetrias, fractais, o número de ouro, etc.
>
> [...] a possibilidade de um interessante trabalho de natureza interdisciplinar: as características geométricas dos diferentes tipos de mapa-múndi, que são dadas via transformações entre espaços de dimensão três e dois.
>
> [...] Uma introdução à geometria vetorial e às transformações geométricas no plano e no espaço – isometria e homotetia – é também mais uma oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos sob os pontos de vista algébrico e geométrico.
>
> [...] Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano. (BRASIL, 2006, p. 92-94)

Tarefa 1: Com base nos trechos dos PCN indicados anteriormente, o que você acha que é simetria para estes documentos?

Tarefa 2: Do ponto de vista de abordagens da História da Matemática, como você avalia o aspecto histórico sobre simetria em Geometria que consta no final da subseção anterior?

Embora pareça redundante, sentimos com o dever de explicitar algumas de nossas conclusões sobre a abordagem que os PCN dão para simetria. Como resultado de nossa análise, corroborados por Mendes (2014, p. 19): o texto não apresenta qual é a definição de simetria que se referem, ou, qual abordagem os professores deveriam usar para contemplar tal conteúdo. O que o texto faz resume-se a destacar a importância de contemplarmos conteúdos relacionados ao assunto, como eixos/planos de simetria para classificar figuras bidimensionais e tridimensionais, definir o que são transformações isométricas, destacar as principais isometrias, além de afirmar que as simetrias são pré-requisitos fundamentais para desenvolver os estudos sobre congruência. De fato, o foco dos PCN está nas transformações isométricas que preservam distâncias e não em objetos simétricos que são invariantes por tais transformações. Em outras palavras, apesar da ideia de "invariância" estar presente nas orientações dos PCN, elas são das transformações e não intrinsicamente dos objetos. Os PCN relacionam isometrias com congruência (o que é válido), mas não dão o passo seguinte que é, dado um objeto geométrico **X**, verificar quais isometrias **F** deixam **X** invariante: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$.

6.2 – O conceito de simetria em outras orientações curriculares

Após a criação dos PCN, já passaram-se 18 anos. É natural que exista alguma movimentação entre os Estados e surjam novos documentos orientadores. Isso se confirma para os Estados do Paraná e Rio de Janeiro, dos quais os autores desse

material fazem moradia. E como nosso objetivo é tecer considerações em termos de documentos curriculares, escolhemos focar apenas nesses dois estados.

O conceito de simetria: visitando o Paraná

Iniciamos pela Educação Básica do Estado do Paraná que tem como documento orientador, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) atrelada, mais recentemente, ao Caderno de Expectativas de Aprendizagem do Estado do Paraná (PARANÁ, 2012). É importante mencionar que o Estado não possui documento orientador para as séries iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, Primeiro e Segundo Ciclos (PCN). Desse modo, não foi possível contemplarmos esse nível em nossa análise nesse Estado.

Os documentos supracitados apresentam os fundamentos teórico-metodológicos e os conteúdos estruturantes que devem organizar o trabalho docente. A partir dos conteúdos apresentados nas Diretrizes realizamos inicialmente uma busca do termo (palavra) *simetria* para o Ensino Fundamental e Médio nesses documentos e constatamos sua presença em duas disciplinas, Arte e Física. Surpreendentemente não encontramos a menção de *simetria* na disciplina de Matemática.

Na disciplina de Arte, no 6º Ano do Ensino Fundamental, *simetria* é comtemplada na área de Artes Visuais, junto aos Elementos Formais: Ponto, Linha, Textura, Forma, Superfície, Volume, Cor e Luz; cuja composição pode ser: Bidimensional, Figurativa, Geométrica e *Simetria*. No Ensino Médio, o conteúdo *simetria* pertence às mesmas composições formais, entretanto envolvendo uma variedade de Movimentos e períodos históricos que deverão contemplá-la, gerando assim, uma gama maior de Expectativas de Aprendizagem em relação a esse conteúdo.

Já na disciplina de Física, *simetria* é contemplada somente no Ensino Médio, no Conteúdo Estruturante Eletromagnetismo, e surge na seguinte expectativa de aprendizagem:

> Compreenda o modelo padrão como uma 'teoria construída' na busca por uma unificação das interações fundamentais que supõe a existência de simetrias (por exemplo, partículas e antipartículas), porém ainda em construção. (PARANÁ, 2012, p. 8, grifo nosso).

O conceito de simetria: visitando o Rio de Janeiro

No estado do Rio de Janeiro, as orientações que norteiam a prática apresentam-se no documento intitulado Currículo Mínimo, que se divide por disciplina a partir do sexto ano. Em busca pela palavra *simetria*, a encontramos apenas na disciplina de Arte, mais especificamente, no 6º Ano no eixo temático Arte e Linguagem em Artes Visuais (uma dentre as quatro linguagens artísticas existentes): "Identificar elementos gráficos como espaço, superfície, simetria, assimetria e proporção no contexto visual da arte figurativa e abstrata." (RIO DE JANEIRO, 2012, p. 7, grifo nosso).

Para as Séries Iniciais, o Currículo Mínimo apresenta-se em um documento separado, intitulado Diretrizes Curriculares - Ensino Fundamental - Anos Iniciais. Em uma busca da palavra *simetria* nesse documento encontramos no eixo *Grandezas e Medidas* três objetivos que a mencionam:

> - Identificar e construir círculos, triângulos, quadriláteros e outros polígonos, bem como perceber suas propriedades, inclusive relativas a simetrias.
> - Identificar e traçar o eixo de simetria em formas geométricas planas e em figuras do cotidiano.
> - Utilizar as artes plásticas para estudar as formas geométricas, os mosaicos, as simetrias (reflexão, rotação, translação), etc., o que favorece o desenvolvimento da criatividade, da sensibilidade, da intuição, da percepção geométrica e do pensamento espacial. (RIO DE JANEIRO, 2010, p. 81, grifos nossos)

Tarefa 3: No seu Estado de origem, existem documentos que orientam o conteúdo integrante da Educação Básica em Matemática ou em outra disciplina? Em caso, afirmativo, como estes documentos tratam a questão de simetria? Faça uma análise.

Encerrando nossa visita aos documentos, podemos afirmar que, para todos estes documentos, tem-se as mesmas conclusões produzidas a partir da análise dos PCN. Existe muita confusão sobre a palavra *simetria.*

6.3 – O conceito de simetria nos livros didáticos

O livro didático tem ocupado um papel de grande importância na prática e pesquisa escolares. O documento Brasil (1998, p. 86), por exemplo, observa que

> Na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, sistematizadas e acessíveis a todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que "o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa".

Como os livros didáticos abordam simetria? Mendes (2014) nos traz uma análise de três coleções. Conclusivamente, o autor detecta que o conceito moderno de simetria tem pouco eco no Ensino Fundamental: dentre as coleções analisadas, apenas uma faz o desenvolvimento da teoria de simetria seguindo as ideias da Definição 1 do Capítulo 3. Mendes (2014) observa também que, entre outros erros, há um, especialmente gritante, no que se refere à dimensão das figuras:

muitos autores de livro didático fazem uma "análise de simetria bidimensional" usando fotografias e gravuras bidimensionais para o estudo de objetos que são tridimensionais (eles, por exemplo, falam de "eixo de simetria" de uma borboleta, enquanto que, sendo a borboleta um objeto tridimensional, o correto seria considerar "plano de simetria").

Tarefa 4: Como os livros didáticos abordam o conceito de *simetria*? Organize-se em grupos. Cada grupo livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2014 que deverão ser analisados à luz do que estudamos até então (abordagem histórica, o conceito moderno e o conceito antigo de simetria, equívocos de dimensão). No final faremos uma discussão conjunta.

7

Desdobramentos e considerações finais

Enquanto que o nosso trabalho até aqui se concentrou principalmente no conceito moderno de simetria, quando aplicado ao contexto de Geometria Euclidiana em Matemática, este conceito se estende para outras áreas da Matemática (Álgebra, Análise, Teoria dos Conjuntos, Lógica, Probabilidade) e, mais ainda, para outras áreas da Ciência: Física, Química, Biologia, Cristalografia, etc.

Não podemos finalizar este texto sem mencionar, mesmo que de maneira muito breve (e talvez, com menos detalhes e conexões que gostaríamos de fazer), pelo menos alguns aspectos de simetria em Física. Como simetria se relaciona com Física? Seguindo Feynman (2012, p. 92), suponha que você esteja fazendo um experimento com as Leis de Newton com um dispositivo que você construiu. Em seguida, você constrói o mesmo aparelho e faz o mesmo experimento em outro lugar, simplesmente transladando tudo de um ponto a outro. As mesmas coisas que aconteceram no experimento original vão acontecer no experimento transladado. Esta é a simetria de translação no espaço das Leis de Newton.

Outro exemplo: suponha que você use a energia do seu corpo para atirar uma maçã para o alto. Ela atingirá o ponto mais alto onde toda a sua energia cinética terá sido transformada em energia potencial. Ela então voltará a cair, atingindo o chão e transferindo sua energia para o chão e, também, para o ar em forma de ruído. Vemos que, à medida que o tempo passa, a energia é transferida, mas ela se conserva. Dito de outra maneira: o fato de um sistema físico ser invariante por translações no tempo, isto é, ao se considerar que translações no tempo são simetrias de um sistema físico, obtemos uma lei de conversação, a saber, a conservação de energia.

A conservação de energia é um exemplo de um resultado muito mais forte que foi publicado em 1918 pela matemática alemã Amalie Emmy Noether (1882-1935) (Figura 27): a toda simetria (contínua) de um sistema físico deve corresponder uma lei de conservação e, reciprocamente, a toda lei de conservação deve corresponder uma simetria (contínua) do sistema físico. Assim, em Física, leis de conservação se identificam com simetrias (contínuas).

Figura 27 – Retrato de Amalie Emmy Noether

Fonte: *Wikimedia Commons*, 2014.

Caso você esteja interessado em saber mais sobre o papel da simetria nas leis físicas, recomendamos o Capítulo 4 de Feynman (2012): o texto é bem acessível e, além de verificar algumas das liberdades que tomamos nas explicações que demos, você também aprenderá como explicar por telefone para um marciano o que é direita e esquerda e verá um relato interessante de (quebra de) simetria descoberta por Louis Pasteur (1822-1895) em experimentos com bactérias e açúcares artificiais.

Não obstante a importância que o conceito moderno de simetria tem, não só em Matemática mas, também, em outras áreas, nosso estudo no Capítulo 6 revelou que ele praticamente não aparece no contexto da Escola Básica. Tanto as orientações curriculares como os livros didáticos abordam o tema com uma interpretação ingênua e frequentemente anacrônica (e sem consciência do anacronismo), ligando o conceito de simetria aos desenhos e ornamentos "simétricos" na Antiguidade, isto sem contar o erro gritante em boa parte dos livros didáticos em fazer análise de simetria de objetos tridimensionais substituindo-os por fotografias bidimensionais e mencionando "eixos de simetria" onde, o correto, seriam "planos de simetria".

Boa parte desta confusão pode estar nos vários significados e usos que a palavra "simetria" teve ao longo de sua história. Ter consciência disto é um bom caminho para se tentar eliminar esta confusão e, aqui, a História da Matemática se faz uma fiel aliada para adquirir esta consciência: para nos apropriarmos desses conceitos com objetivos educacionais, entendemos que é necessário vestirmos os "óculos do passado" e discernir os conceitos e ideias que possuímos nos tempos atuais em comparação com aqueles que eram usados no passado. Nesse contexto, é necessário aproximar o professor que ensina Matemática da História da Matemática, a fim de subsidiar o seu trabalho para que ela possa elaborar estratégias de ensino, com intuito de articular História e Ensino da Matemática. Esperamos que este nosso trabalho possa ter cumprido o papel ao aproximar você dessa discussão.

Deixamos aqui dois questionamentos principais: (1) Dada a sua importância e conexões interdisciplinares com outras áreas, não deveríamos dedicar mais espaço para o conceito moderno de simetria no currículo da Educação Básica, principalmente no Ensino Médio onde a linguagem funcional está disponível? (2) Onde e como o conceito moderno de simetria está presente nos cursos de formação de professores?

Bibliografia

ARMSTRONG, Mark A. *Groups and Symmetry*. New York: Springer-Verlag, 1988.

BAKER, William; HOWE, Roger. *Continuous Symmetry: From Euclid to Klein*. Providence: American Mathematical Society, 2007.

BELLO, Anthony Lo. *Origins of Mathematical Words: A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek, and Arabic Roots*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2013.

BRADING, Katherine; CASTELLANI, Elena. (Eds). *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2003.

BORGES, Marcos Francisco. *Ciência e Religião: Reflexões sobre Os Livros de História da Matemática e A Formação do Professor*. São Paulo: USP, 2010. 264 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-20042010-143 528/>. Acesso em: 24 dez. 2014.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: Ministério da Educação, 1997.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Secretária de Educação Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Secretária de Educação Básica. Brasília. MEC, 2006.

CARTER, Nathan. *Visual Group Theory*. Classroom Resource Materials. Washington D.C.: Mathematical Association of America, 2009.

DARVAS, György. *Symmetry: Cultural-Historical and Ontological Aspects of Science–Arts Relations*. Tradução: David Robert Evans. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag AG, 2007.

DUREN, Peter. *Changing Faces: The Mistaken Portrait of Legendre*. Notices of AMS, v. 56, n. 11, p. 1440-1443, 2009. Disponível em: <http://www.ams.org/notices/200911/rtx091101440p.pdf> Acesso em: 28 dez. de 2014.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FEYNMAN, Richard. *Sobre As Leis da Física*. Tradução: Marcel Novaes. Rio de Janeiro: Editora PUC-Rio, 2012.

FLORENCIO, Marieli Parteli. *Transformações no Plano e Grupos de Simetria*. São Carlos: UFSCar, 2011. 49 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/6/TCC_Final_Mariele.pdf>. Acesso em: 25 dez. 2014.

GOWERS, Timothy. (Ed). *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 2008.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. *History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education.* In: VAN BRUMMELEN, Glen; KINYON, Michael. (Eds). *Mathematics and The Historian's Craft: The Kenneth O. May Lectu-*

res. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005. p. 7-21.

HEATH, Thomas Little. *The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3v*. Cambridge: University Press, 1956.

HEIBERG, I. L.; MENGE, H. *Euclidis Opera Omnia*. Vol. III. Lipsiae: aedibus B. G. Teubneri 1883.

HON, Giora; GOLDSTEIN, Bernard R. *From Proportion to Balance: The Background to Symmetry in Science*. Studies in History and Philosophy of Science, v. 36, p. 1-21, 2005.

HON, Giora; GOLDSTEIN, Bernard R. *From Summetria to Symmetry: The Making of A Revolutionary Scientific Concept*. Archimedes: New Studies in The History of Science and Technology, New York: Springer-Verlag, 2008.

ITARD, Jean. *Adrien-Marie Legendre Biography*. In: GILLISPIE, Charles Coulston. (Ed). *Dictionary of Scientific Biography*. Volume 8. New York: Simon & Schuster, 1973. p. 135-143.

KATZ, Victor J. *A History of MATHEMATICS: An Introduction*. Third Edition. Boston: Pearson Education, Inc., 2009.

KRUFT, Hanno-Walter. *History of Architectural Theory*. Princeton: Princeton Architectural Press, 1996.

LEGENDRE, Adrien-Marie. *Eléments de Géométrie*, *avec des Notes*. Paris: Firmin Didot, 1794.

LEGENDRE, Adrien-Marie. *Elementos de Geometria.* Tradução: Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Organização e adaptação: Luiz Carlos Guimarães. Rio de Janeiro: Editora LIMC-UFRJ, 2009.

LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemá-*

tica do Ensino Médio. Volume 1. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

LIVIO, Mario. *The Equation That Couldn't Be Solved. How Mathematical Genius Discovered the Language of Symmetry.* New York: Simon & Schuste, 2006.

MAINZER, Klaus. *Symmetries of Nature: A Handbook for Philosophy of Nature and Science*. Tradução: Barbara H. Mohr. Boston: Walter de Gruyter & Co., 1988.

MARTIN, George E. *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag, 1982.

MARTINS, Lilian Al-Chueyr Pereira. *História da Ciência: Objetos, Métodos e Problemas*. Ciência & Educação, v. 11, n. 2, p. 305-317, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v11n2/10.pdf>

MCCOUAT, Phillip. *On The Trail of The Last Supper*. Journal of Art in Society, Disponível em: <http://www.artinsociety.com/on-the-trail-of-the-last-supper.html>. Acesso em: 24 dez. 2014.

MENDES, Carlos Octávio de Abreu e Silva. *O Conceito Moderno de Simetria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: Uma Análise*. Niterói: UFF, 2014. 48 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Fluminense, Niterói, 2014.

MENDES, Carlos Octávio de Abreu e Silva; BORTOLOSSI, Humberto José. *O Conceito Moderno de Simetria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: Uma Análise.* Anais do VI Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro, Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2014. Disponível em: <http://eemat.sbemrj.com.br/wp-content/uploads/2014/10/CC45_Carlos_Humberto.pdf>. Acesso em: 24 dez. 2014.

PARANÁ. *Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes Curriculares da educação Básica – Matemática*. Curitiba, 2008.

PARANÁ. *Secretaria de Estado da Educação. Caderno de Expectativas de Aprendizagem – Matemática*. Curitiba, 2012.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação. *Currículo Mínimo 2012. Matemática.* Rio de Janeiro, 2012.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação. *Currículo Mínimo 2012. Arte.* Rio de Janeiro, 2012.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação. *Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental Anos Iniciais*. Rio de Janeiro, 2010.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2012.

ROY, Wagner. *For Some Histories of Greek Mathematics*. Science in Context, v. 22, n. 4, p. 535-565, 2009.

SIMSON, Robert. *The Elements of Euclid, viz. The First Six Books, together with the Eleventh and Twelfth. In this Edition, the Errors, by which Theon, or others, have long ago Vitiated these Books, are Corrected, And some of Euclid's Demonstrations are Restored*. Glasgow: Foulis, 1756.

STEWART, Ian. *Uma História da Simetria na Matemática*. Tradução: Claudio Carina. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2012.

TAPP, Kristopher. *Symmetry: A Mathematical Exploration*. New York: Science+Business Media, LLC, 2012.

VALENTE, Wagner. R. *Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930)*. São Paulo: Annablume/FAPESP, 2007.

VITRUVIUS. *The Ten Books On Architecture*. Tradução: Morris Hicky Morgan. London: Humphrey Milford, 1914.

WEIL, André. *History of Mathematics: Why and How*. Proceedings of The International Congress of Mathematics, Helsinki, p. 227-236, 1978.

WEYL, Hermann. *Symmetry*. Princeton: Princeton University Press, 1952.

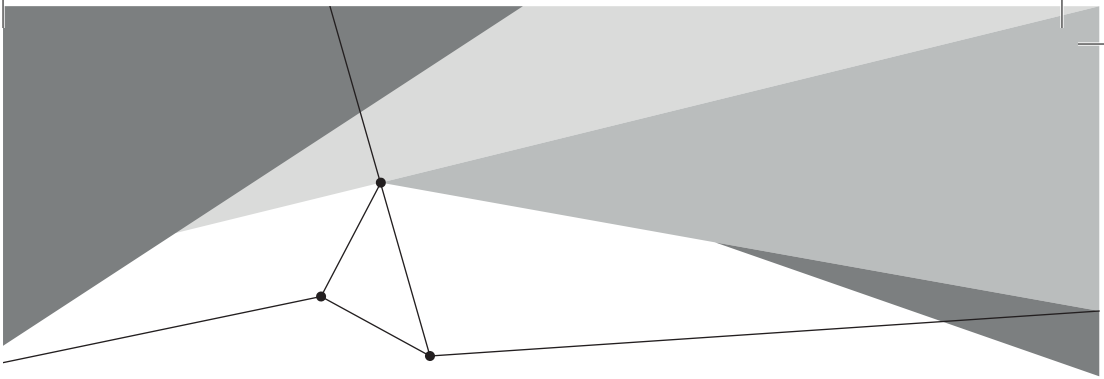
YAGLOM, Isaak Moiseevich. *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of The Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*. Tradução: Sergei Sossinsky. Harrisonburg: Birkhiiuser Boston, 1988.

Sobre os Autores

Regina Célia Guapo Pasquini é Doutora em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro, Mestre em Matemática pela USP-SC, Especialista em Matemática pela UEM e Licenciada em Matemática pela UEM. Professora do Departamento de Matemática da UEL em Londrina/PR. Atua na Graduação (UEL) na Especialização em Educação Matemática (UEL) e no Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT/UEL). Coordenadora da Segunda Licenciatura em Matemática do PARFOR. Membro do Fórum Permanente de Licenciaturas FOPE/UEL e Colaboradora do Programa PIBID/UEL. Membro do GETOM (Grupo de Estudos e Trabalho das Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas). Membro da Sociedade Brasileira de História da Matemática. Seus interesses são voltados para a história da Matemática, o ensino e a aprendizagem de Matemática nos vários níveis de ensino. E-mail: rcgpasq@uel.br

Humberto José Bortolossi é Doutor em Matemática Aplicada pela PUC-Rio, Mestre em Matemática pelo IMPA e Licenciado em Matemática pela UEM. Professor do Departamento de Matemática Aplicada da UFF em Niterói/RJ. Atua na graduação presencial (UFF) e a distância (CEDERJ/UAB), na Especialização em Matemática para Professores (UFF) e no

Mestrado Profissional (PROFMAT/UFF). É coordenador do Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro e membro do Comitê Acadêmico da Casa SESI Matemática. É membro da SBM e SBEM (no Brasil), AMS, MAA e NCTM (nos EUA). Seus interesses incluem, entre outros tópicos, a pesquisa e o desenvolvimento de recursos computacionais para o ensino e a aprendizagem de Matemática e Estatística nos vários níveis de ensino. E-mail: hjbortol@vm.uff.br



Volumes desta Série

1. Aspectos históricos da régua de cálculo para a construção de conceitos matemáticos
   Ana Carolina Costa Pereira

2. Empatia e história da Matemática
   Antonio Carlos Brolezzi

3. As correspondências entre Euler e a princesa alemã como unidades básicas de problematização para as aulas de Matemática
   Daniele Esteves Pereira
   Iran Abreu Mendes

4. História da Educação Matemática e o uso de um repositório de conteúdo digital
   David Costa
   Wagner Valente

5. A construção do conceito de área a partir de atividades fundamentadas na história da matemática
   Edilene Simões Costa
   Cristiano Alberto Muniz
   Maria Terezinha Jesus Gaspar

6. Narrativas sobre história da educação matemática na/para a formação de professores
Heloisa da Silva
Vinícius Sanches Tizzo

7. Narrativas e História Oral: possibilidades de investigação em Educação Matemática
Luzia Aparecida de Souza
Carla Regina Mariano da Silva

8. Os Concursos de Malba Tahan veiculados na *Ultima Hora*, em 1972
Moysés Gonçalves Siqueira Filho

9. Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar
Regina Célia Guapo Pasquini
Humberto José Bortolossi

10. História da Matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos
Miguel Chaquiam